

Spis treści

Rozdział 1: Wstęp.....	8
Rozdział 2: Oznaczenia i definicje.....	9
2.1. Oznaczenia ogólne	9
2.2. Skrót i terminy.....	9
Rozdział 3: Cel i tezy pracy	11
Rozdział 4: Podstawy teoretyczne.....	12
4.1. Zagadnienia w klasycznej teorii sterowania.....	12
4.2. Zagadnienia w nowoczesnej teorii sterowania.....	13
4.3. Wprowadzenie do metody H_∞	14
4.3.1. Skalowanie obiektu	14
4.3.2. Norma macierzowa	15
4.3.3. Uogólniony model sterowania	16
4.4. Zastosowanie metody H_∞ do rozwiązywania problemów sterowania.....	18
4.4.1. Sterowanie nadążne (serwo).....	18
4.4.2. Problem regulacji	20
4.4.3. Sterowanie odporne.....	20
4.4.4. Inne zastosowania	22
Rozdział 5: Modelowanie obiektu sterowania	23
5.1. Wprowadzenie do zasad modelowania obiektów sterowania	23
5.2. Stanowisko z wahadłem odwróconym.....	24
5.3. Model matematyczny	24
5.3.1. Model fizyczny.....	26
5.3.2. Przekształcenie modelu fizycznego	27
5.4. Linearyzacja modelu matematycznego	29
5.5. Zapisanie modelu w postaci przestrzeni stanów	29
5.6. Skalowanie modelu dla metody H_∞	31

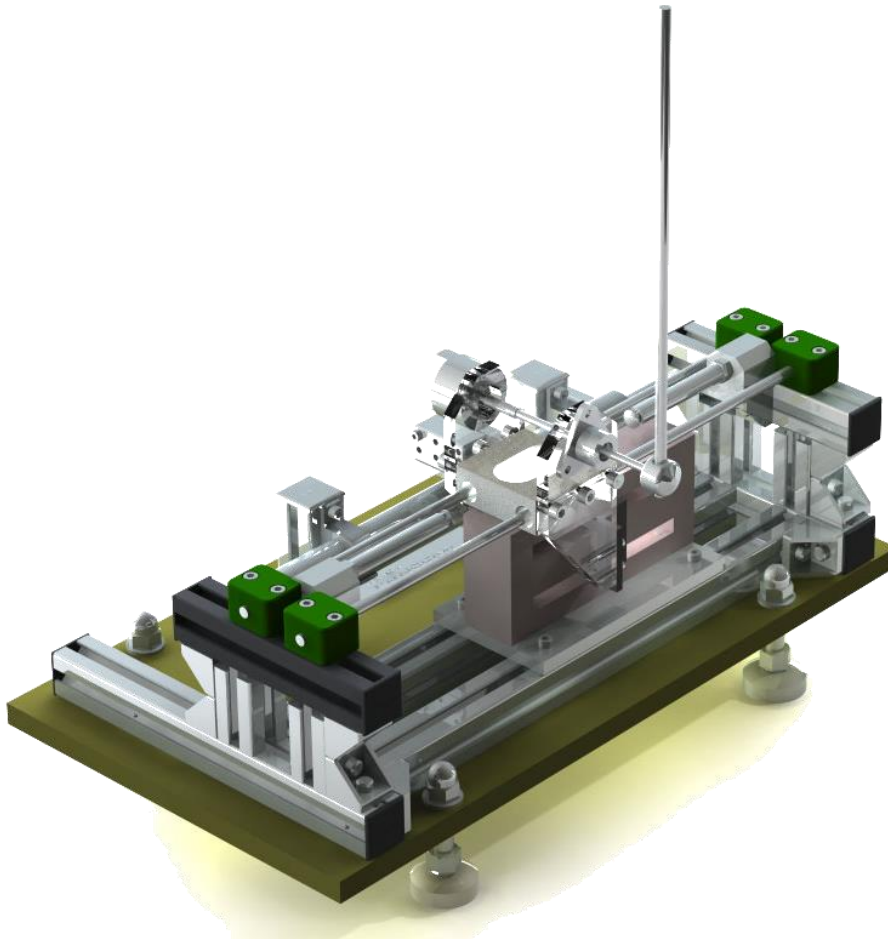
Rozdział 6: Identyfikacja obiektu sterowania	33
6.1. Wprowadzenie do użytej metody identyfikacji.....	33
6.2. Eksperyment 1	33
6.3. Eksperyment 2.....	35
6.4. Eksperyment 3.....	36
Rozdział 7: Analiza sterowalności obiektu	40
7.1. Cel przeprowadzania analizy sterowalności	40
7.2. Wstępna analiza obserwowalności i sterowalności.....	40
7.3. Pełna analiza sterowalności.....	40
7.3.1. Skalowanie obiektu	41
7.3.2. Sprawdzenie minimalności realizacji obiektu.....	41
7.3.3. Sprawdzenie sterowalności funkcjonalnej	41
7.3.4. Sprawdzenie biegunów obiektu	41
7.3.5. Sprawdzenie zer obiektu	42
7.3.6. Sprawdzenie charakterystyki częstotliwościowej $ G(j\omega) $ i obliczenie macierzy RGA	43
7.3.7. Wykreślenie wartości osobliwych obiektu.....	43
7.3.8. Analiza wartości osobliwych obiektu	44
7.3.9. Sterowalność ze względu na zakłócenia	44
7.3.10. Sterowalność ze względu na nasycenie wejść przy istnieniu zakłócenia.....	45
7.3.11. Wzmocnienie zakłóceń przez zera transmitancji zakłócenia leżące po prawej stronie płaszczyzny Gaussa.....	46
7.3.12. Niepewności modelu	47
7.4. Podsumowanie	47
Rozdział 8: Synteza regulatorów dla obiektu sterowania	48
8.1. Synteza regulatora przy użyciu metody przesuwania biegunów	48
8.2. Synteza regulatora LQR.....	49
8.3. Synteza regulatora H_∞	52
8.3.1. Podejście uproszczone – regulator H_∞ „prosty”	52
8.3.2. Podejście z wejściem zakłóceń do obiektu – regulator H_∞ „zaawansowany”	54
8.4. Porównanie wyników	57

Rozdział 9: Podsumowanie i wnioski	61
Załącznik A: Literatura	63
Załącznik B: Analiza sterowalności obiektu	64
Załącznik C: Dokumentacja mechaniczna stanowiska	70
Załącznik D: Dokumentacja elektryczna stanowiska	71
Załącznik E: Dokumentacja oprogramowania do stanowiska i do syntezy regulatorów.....	72
E.1. Matlab.....	72
E.2. Simulink	78
E.3. LabView	79
E.4. Mathematica	83

Rozdział 1: Wstęp

Teoria sterowania jest żywą dziedziną nauki. Niemalże codziennie powstają nowe artykuły i opracowania na temat różnych metod sterowania. Jest to między innymi związane z rozwojem technologii cyfrowych i ich praktycznym zastosowaniem w sterowaniu maszynami.

W mojej pracy zajmę się zbudowaniem przykładowego, złożonego obiektu sterowania z nieliniowością – stanowiska z wahadłem odwróconym, oraz zastosowaniem w nim kilku typowych metod sterowania.



Rysunek 1.1: Stanowisko z wahadłem odwróconym – widok ogólny

Rozdział 2: Oznaczenia i definicje

2.1. Oznaczenia ogólne

M_p – masa wahadła

M_c – masa wózka

I_p – moment bezwładności wahadła

L – odległość środka masy wahadła od osi obrotu;

c – współczynnik tarcia wiskotycznego obrotowego, między wahadłem a wózkiem

b – współczynnik tarcia wiskotycznego liniowego, między wózkiem a szyną prowadzącą

$F_a(t)$ – siła pochodząca od silnika liniowego w stanowisku

$F_x(t), F_y(t)$ – siły pochodzące od uwalniania od więzów elementów kinematycznych stanowiska; siły pomiędzy wahadłem a wózkiem

$x(t)$ – położenie wózka

$x'(t), x_1(t)$ – prędkość wózka;

$x''(t), x_2(t)$ – przyspieszenie wózka;

$f_i(t)$ – kąt obrotu wahadła względem pozycji „do góry”

$f_i'(t), f_{i1}(t)$ – prędkość obrotowa wahadła

$f_i''(t), f_{i2}(t)$ – przyspieszenie obrotowe wahadła

$r_x(t)$ – sygnał zadający położenie wózka

K – ogólna postać regulatora

G – obiekt sterowania

P – obiekt sterowania z dołączonym modelem aktuatorów, czujników, oraz funkcji wagowych

W_{act}, W_e, W_y , i.t.p. – funkcje (transmitancje) wagowe odpowiednio aktuatora, uchybu e , wyjścia y i.t.p.

X – wektor stanu układu

U – wektor sterowań układu

Y – wektor wyjść układu

J – funkcja kosztu

2.2. Skróty i terminy

LQR – Linear-Quadratic Regulator; Regulator Liniowo-kwadratowy;

H_∞ - H-infinity – Metoda H-nieskończoność

MIMO – Multiple Input, Multiple Output – obiekt o wielu wejściach i wielu wyjściach;

SISO – Single Input, Single Output – obiekt o jednym wejściu i jednym wyjściu.

Rozdział 3: Cel i tezy pracy

Celem pracy jest zbudowanie stanowiska dydaktycznego „Wahadło odwrócone” na bazie dostarczonych elementów, a następnie zaimplementowanie wybranych algorytmów sterowania w środowisku LabView+RealTime ETS.

Celem dodatkowym jest porównanie klasycznych metod regulacji z regulatorem którego syntezy dokonano metodą H_∞ .

Teza 1 pracy: Metoda H_∞ dla syntezy regulatorów pozwala na pełniejsze opisanie i spełnienie wymagań co do jakości sterowania, a tym samym uzyskanie aplikowanego regulatora przy mniejszej ilości iteracji, niż przy użyciu syntezy regulatora przy wykorzystaniu regulatora LQR.

Teza 2 pracy: Połączenie wielu narzędzi: Matlab, Simulink, LabView, Mathematica – pozwala na porównanie wielu dostępnych rozwiązań i efektywne przeprowadzenie syntezy regulatora.

Rozdział 4: Podstawy teoretyczne

4.1. Zagadnienia w klasycznej teorii sterowania

W klasycznej teorii sterowania istnieje kilka wskaźników jakości sterowania: Czas narastania, czas ustalania, przesterowanie, współczynnik tłumienia i uchyb statyczny. Wskaźnikami odporności układów na zmiany parametrów są marginesy wzmocnienia, fazy, opóźnienia i modułu. Wymagania co do jakości sterowania stawiane przez odbiorców automatycznie sterowanych urządzeń często zawierają takie wymagania. Jednak dostrajanie regulatorów aby spełnić takie wymagania jest często procesem iteracyjnym. Nawet jeśli uda się spełnić wszystkie wymagania, inżynier pozostaje z pytaniem: Czy lepsze rozwiązanie jest możliwe? Wymienione wskaźniki jakości mają mniejsze zastosowanie w układach MIMO, zwłaszcza, jeżeli istnieją znaczne sprzężenia pomiędzy stanami układu.

Aby uprościć problem MIMO rozwinięto teorię dekompozycji obiektu sterowania przy pomocy wartości własnych; metoda ta jednak nie daje dobrych rezultatów w jeśli w układzie istnieją duże sprzężenia między stanami. Na przykład wartości własne macierzy

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

wynoszą

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

a zatem gubią informację o sprzężeniach w układzie.

Wartości marginesów wzmocnienia i fazy dla dekomponowanego układu mają małe odzwierciedlenie w odporności oryginalnego układu. Istnieją przykłady w [2] całkowicie stabilnych nominalnie układów, które jednocześnie są arbitralnie bliskie niestabilności w wypadku perturbacji parametrów obiektu.

Można zatem powiedzieć, że znana jako „klasyczna” teoria sterowania nie daje dobrych narzędzi do analizowania obiektów MIMO.

4.2. Zagadnienia w nowoczesnej teorii sterowania

„Nowoczesna teoria sterowania” to termin który wychodzi już powoli z użycia, ale odnosi się głównie do prac Kalmana z lat 1958-1961. Są one związane z rozwiązaniem problemu sterowania optymalnego opartego o wskaźnik kosztu

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt \quad (4.3)$$

gdzie Q i R, to pewne macierze wag o kompatybilnych rozmiarach. Tak postawiony problem sterowania – minimalizacja czasu sterowania przy jednoczesnej minimalizacji kosztu sterowania – pasuje do wielu problemów spotykanych w przemyśle. Regulator minimalizujący taki wskaźnik został znaleziony przez Kalmana:

$$U = -R^{-1} B^T P X \quad (4.4)$$

Gdzie P jest rozwiązaniem równania różniczkowego drugiego rzędu: (Riccatiego):

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (4.5)$$

Używając podobnego zestawu równań (t.z.w. Filtru Kalmana) można zbudować optymalny estymator stanu, co w połączeniu z powyższym prawem sterowania (4.4) prowadzi do t.z.w. regulatora Liniowo-Kwadratowo-Gausowskiego (LQG). Nazwisko Gaussa odnosi się tutaj do faktu, że estymator taki minimalizuje błąd estymacji przy założeniu Gausowskiego rozkładu szumów.

Innymi słowy, mając model obiektu, oraz macierze wag dla każdego stanu i wejścia, automatycznie uzyskuje się regulator który jest optymalny względem wskaźnika (4.3). Jeśli wszystkie założenia postawione przez Kalmana są spełnione, regulator LQG wykazuje margines fazy lepszy niż 60° oraz nieskończony margines wzmocnienia.

Metodologia taka znalazła szerokie zastosowanie w różnych problemach sterowania, w szczególności w sterowaniu pojazdami kosmicznymi (optymalizacja zużycia paliwa, przewidywalne zakłócenia, dobre, liniowe modele obiektów).

Jednak Metodologia LQG ma pewne wady, a w szczególności:

- Założenie, że zakłócenia mają średnią zero w każdym odcinku czasu, tj. spodziewana wartość zakłócenia w dowolnej chwili wynosi zero (czyli, że ma rozkład Gaussa) – co często nie jest spełnione w praktyce przemysłowej

- Macierze wag mają niejasny związek z zachowaniem gotowego regulatora; proces projektowania najczęściej składa się z iteracji przez różne „optymalne” regulatory aby znaleźć właściwe macierze wag
- Model obiektu musi być dobrze znany
- Odporność obiektu na zmiany parametrów musi być badana „a posteriori” – po procedurze syntezy

Odporność obiektów sterowanych regulatorami LQG zależy również w dużej mierze od wyboru mierzonych stanów i sterowanych wejść; jeśli zostaną one niewłaściwie wybrane, niektóre założenia Kalmana mogą nie być spełnione, a wtedy regulator taki nie gwarantuje odporności [4].

Wymienione powyżej trudności są źródłem głosów, że metoda LQG nie odpowiada dobrze na zagadnienia spotykane w przemyśle; „optymalne” regulatory często prowadzą do mniejszej wydajności niż spodziewana, ponieważ wskaźnik jakości może nie uchwycić wszystkich właściwości układu. Metoda LQG zaproponowana jako sposób na optymalizację wydajności sprawdza się tylko w przypadku, gdy spełnione są wszystkie założenia, a nie zawsze tak jest. Zdarza się, że bardziej pożądanym byłoby optymalizowanie odporności układu na zakłócenia i niepewność modelu. Wymagania te dają miejsce metodzie H_∞ .

4.3. Wprowadzenie do metody H_∞

Główną różnicą pomiędzy metodą LQG a H_∞ jest to, że założenia są mniej ostre. Zakłócenie nie musi być o rozkładzie Gaussa, a ponadto można wprowadzić niepewność modelu jako czynnik przy syntezie regulatora.

Można powiedzieć, że LQG jest projektowaniem na „typowy” przypadek, a H_∞ - na najgorszy przypadek.

Aby użyć metodę H_∞ do projektowania układów sterowania, potrzebne są wstępne informacje na temat skalowania obiektu, normy macierzowej, oraz uogólnionego modelu sterowania.

4.3.1. Skalowanie obiektu

Aby skutecznie zastosować metody projektowania H_∞ , zalecane jest znormalizowanie wejść/wyjść obiektu sterowania [1]. Należy tak przeskalować wejścia i wyjścia, aby ich spodziewane wartości mieściły się w bezwymiarowym zakresie ± 1 .

Niech będzie zachowanie obiektu opisane równaniem:

$$\hat{y} = \hat{G}\hat{u} + \hat{G}_D\hat{d}; \quad \hat{e} = \hat{y} - \hat{r}; \quad (4.6)$$

Gdzie $\hat{y}, \hat{u}, \hat{d}$ - sygnały w oryginalnym modelu, najczęściej w jednostkach SI; dla rzeczywistego obiektu najczęściej znane są maksymalne dopuszczalne wartości tych sygnałów. Jeśli dane wartości nie są znane, lub znajdują się wewnątrz modelu (np. uchyb \hat{e}_{\max}) należy przyjąć „pożądane” wielkości tych wartości.

Niech zatem będą dane wartości skalujące $y_{\max}, u_{\max}, d_{\max}$ itd. wtedy sygnały w modelu znormalizowanym dane są wzorem

$$y = \frac{\hat{y}}{y_{\max}}, u = \frac{\hat{u}}{u_{\max}} \quad (4.7)$$

itd. a zatem

$$y = y_{\max}^{-1} \hat{G} u_{\max} u + y_{\max}^{-1} \hat{G}_D d_{\max} d; \quad (4.8)$$

Jeśli więc przyjmiemy, że

$$G = y_{\max}^{-1} \hat{G} u_{\max}; \quad G_D = y_{\max}^{-1} \hat{G}_D d_{\max} \quad (4.9)$$

$$\hat{G} = y_{\max} G u_{\max}^{-1}; \quad \hat{G}_D = y_{\max} G_D d_{\max}^{-1} \quad (4.10)$$

To powrócimy do znajomej postaci jak w równaniu 4.1

Dla kompletności, to samo zapisuje się dla regulatora:

$$u = u_{\max}^{-1} \hat{K} e_{\max} e; \quad (4.11)$$

zatem

$$K = u_{\max}^{-1} \hat{K} e_{\max}; \quad \hat{K} = u_{\max} K e_{\max}^{-1} \quad (4.12)$$

Dla obiektów MIMO wartości skalujące \bullet_{\max} stają się macierzami diagonalnymi.

Przedstawiona powyżej procedura normalizacji obiektu sterowania pozwala na sformułowanie generalnego zadania sterowania: przy założonym $|r| < 1$ oraz $|d| < 1$, znaleźć takie K, aby zachować $|e| < 1$ przy $|u| < 1$ przez co najmniej większość czasu.

Powyższe zagadnienie jest centralnym w metodzie H_{∞} , jak również może służyć do szacowania jakości dowolnego innego regulatora. $\|\bullet\|$

4.3.2. Norma macierzowa

Norma $\|A\|$ na macierzy A jest funkcją, która ma kilka właściwości:

$$\|A\| \in R \quad (4.13)$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad (4.14)$$

$$\|A\| \geq 0 \text{ z równością wtedy i tylko wtedy gdy } A = 0 \quad (4.15)$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (4.16)$$

Dodatkowo, normy H_∞ i H_2 mają właściwość podmultiplikacji:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (4.17)$$

Właściwość ta jest bardzo istotna ponieważ pozwala na badanie norm obiektów połączonych szeregowo.

Norma macierzowa jest funkcją skalarną; określa pewną właściwość macierzy jako pojedynczą liczbę. Pozwala to na zastosowanie normy jako funkcji kosztu w scenariuszu optymalizacji, analitycznej lub numerycznej.

Norma H_∞ jest dana wzorem:

$$\|A\|_{i_\infty} = \max_i \left(\sum_j a_{ij} \right) \quad (4.18)$$

Norma H_2 dana jest wzorem:

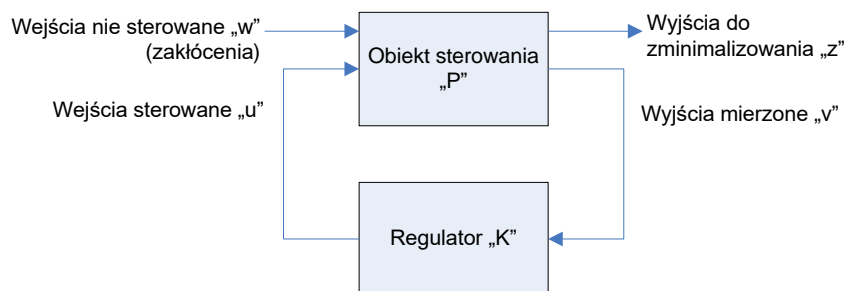
$$\|A\|_{i_2} = \bar{\sigma}(A) = \sqrt{\rho(A^H A)} \quad (4.19)$$

gdzie A^H oznacza transpozycję zespoloną (Hermitan) z A ; $\rho = \max_i |\lambda_i(A)|$ - największa wartość własna macierzy A ; $\bar{\sigma}(A)$ - największa wartość osobliwa macierzy A [3].

Dla systemów MIMO, norma H_2 określa średnie wzmocnienie z wszystkich kierunków, dla całego zakresu częstotliwości, a norma H_∞ określa szczytowe wartości z wszystkich kierunków, dla całego zakresu częstotliwości[3].

4.3.3. Uogólniony model sterowania

Rozważany jest następujący model połączenia obiektu sterowania z regulatorem:



Rysunek 4.1: Uogólniony model sterowania

W modelu tym obiekt sterowania posiada:

- wejścia nie sterowane „w” – które można uważać za zakłócenia; należą do nich również sygnały odniesienia w przypadku problemu typu serwo.
- wejścia sterowane „u” pochodzące od regulatora; ewentualny model aktuatorów powinien być zawarty wewnątrz opisu obiektu P
- wyjścia mierzone „v” – podzbiór z mierzalnych wartości w obiekcie; model czujników powinien być zawarty w opisie obiektu P
- wyjścia nie mierzone, nie wchodzące do regulatora, lub nie mierzalne, które służą jako sygnały do zminimalizowania.

Wszystkie z tych wejść i wyjść to generalnie wektory, a P i K to macierze przestrzeni stanów.

Podany układ można opisać wtedy równaniami

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$u = K(s)v \quad (4.20)$$

Można zatem wyrazić zależność z od w jako

$$z = F_l(P, K)w \quad (4.21)$$

z 4.20 wynika, że

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (4.22)$$

Celem metody H_∞ jest znalezienie takiego K, żeby zminimalizować normę $H_\infty(F_l(P, K))$, a zatem zminimalizować wpływ w na z.

Przez minimalizację wpływu w na z można znaleźć taki regulator K, który:

- maksymalizuje jakość sterowania w problemie regulacji i problemie serwo
- uwzględnia limity aktuatorów i samego obiektu sterowania
- uwzględnia niepewność modelu obiektu sterowania
- uwzględnia wpływ szumów pomiaru

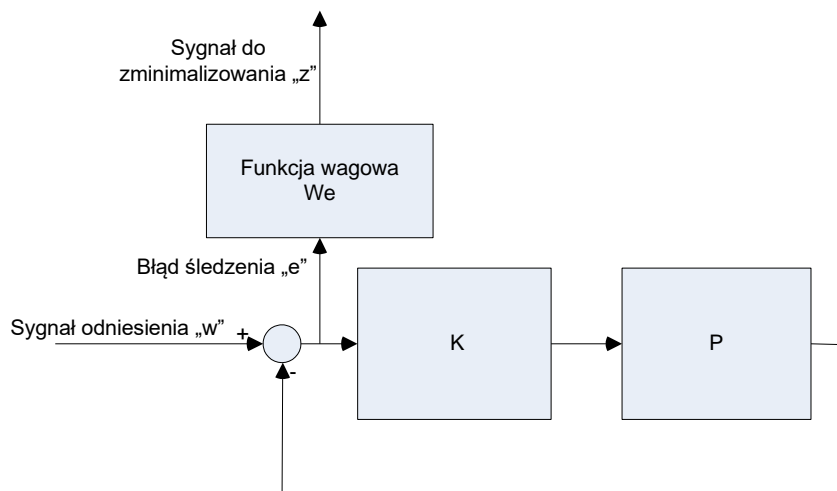
Zagadnienia te są szerzej omówione w rozdziale 4.4

4.4. Zastosowanie metody H_∞ do rozwiązywania problemów sterowania

4.4.1. Sterowanie nadążne (serwo)

Problem serwo, to problem takiego manipulowania wejściami obiektu, aby jego wyjścia oddawały jak najlepiej sygnał odniesienia.

Aby zmaksymalizować jakość sterowania w problemie serwo, można posłużyć się następującym schematem:

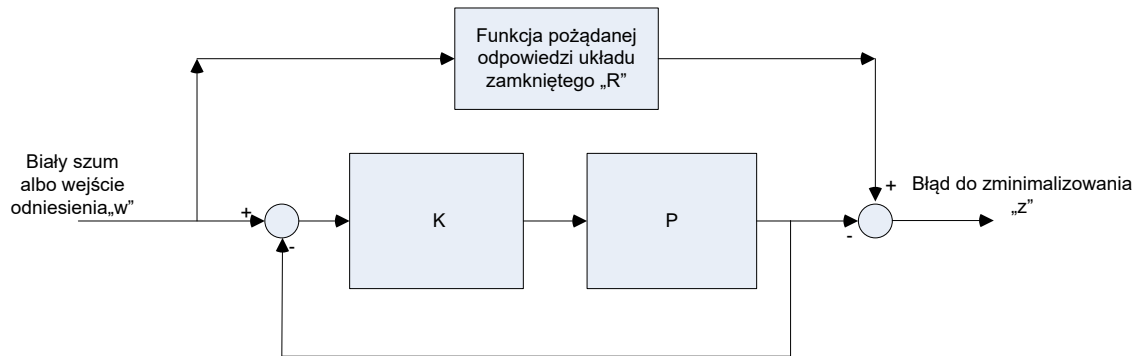


Rysunek 4.2: Schemat syntezy H_∞ do problemu serwo

Funkcja wagowa to transmitancja dobierana przez inżyniera, ważąca błąd e w funkcji częstotliwości.

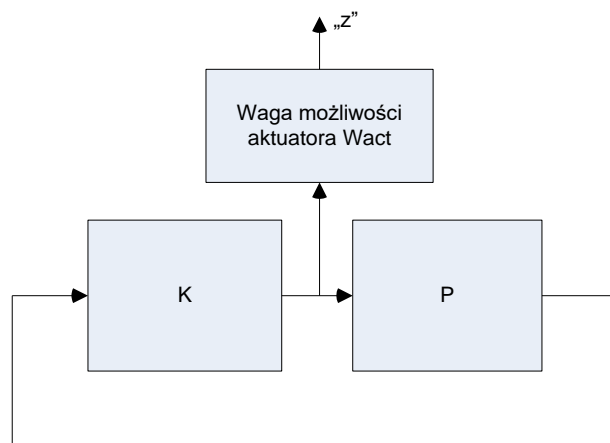
W idealnym przypadku, jeśli $K \cdot P = 1$, norma funkcji $F_l(P, K)$ od w do z była by równa zero, a błąd śledzenia wejścia w zupełnie skasowany. Było by to możliwe dla całkowicie odwracalnego P : $K = 1/P$. Jednak występowanie opóźnień i biegunów po prawej stronie płaszczyzny Gaussa sprawia że najczęściej nie jest możliwe zastosowanie odwrotności P jako K ; Minimalizowanie normy funkcji $F_l(P, K)$ przy założeniu pełnej stabilności K jest po prostu szukaniem najlepszego możliwego, realizowalnego przybliżenia $1/P$.

Jeśli zamiast poszukiwać $1/P$ bardziej pożądane jest specyficzne ukształtowanie odpowiedzi układu, można użyć następującego schematu:



Rysunek 4.3: Schemat do syntezy regulatora kształtującego odpowiedź układu zamkniętego (loop shaping)

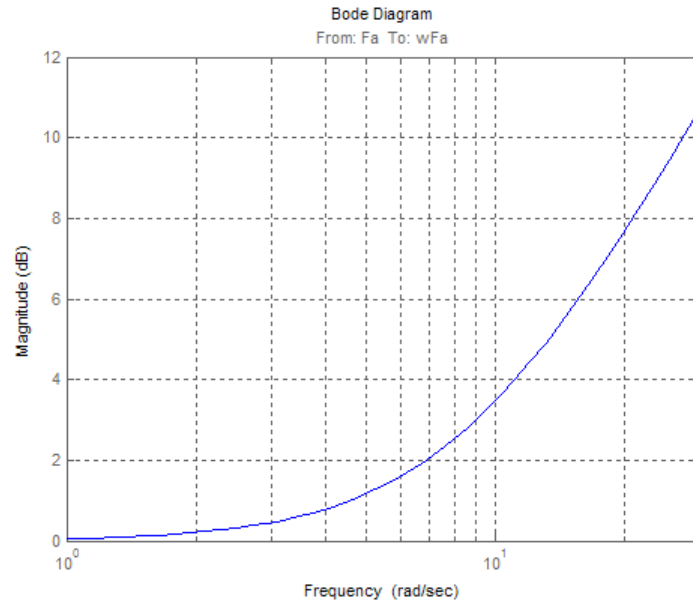
W tym schemacie, minimalizując normę funkcji $F_l(P,K)$, znajdujemy regulator K dążący do nadania układowi zamkniętemu pożądanej charakterystyki. Jako transmitancję R zazwyczaj przyjmuje się transmitancję 2-giego rzędu z tłumieniem krytycznym. Aby uwzględnić możliwości organów wykonawczych w układzie, stosuje się następujący schemat z funkcją wagową:



Rysunek 4.4: Schemat uwzględnienia możliwości aktuatora w układzie

Tu waga W_{act} jest transmitancją, której moduł określa koszt wykorzystania aktuatora przy danej częstotliwości. Na przykład waga:

```
Wact=1*tf([1/9 1],[1/200 1]);
Wact.InputName='Fa'; Wact.OutputName='wFa';
```

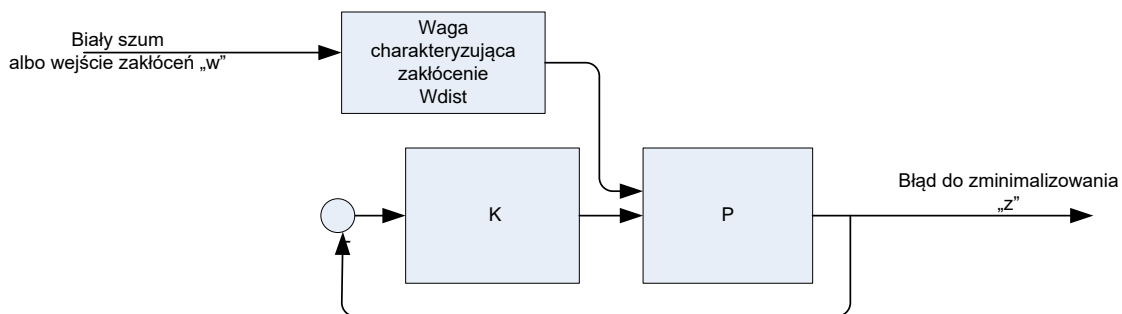


Rysunek 4.5: Wykres modułu wagi Wact

Waga jak na rysunku 4.5 oznacza, że względny koszt wykorzystania aktuatora wynosi około 1 (<3dB) dla częstotści poniżej 9[rad/s], i rośnie powyżej tej częstotści.

4.4.2. Problem regulacji

Problem regulacji, to problem takiego manipulowania sterowanymi wejściami obiektu, aby zneutralizować wpływ niesterowalnych wejść obiektu (zakłóceń) na obiekt:

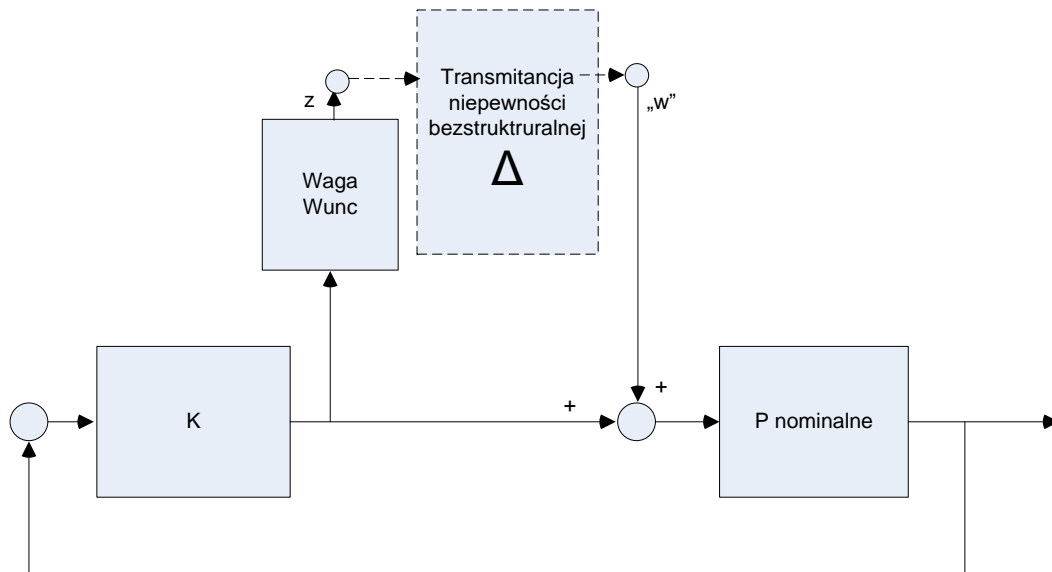


Rysunek 4.6: Schemat syntezy regulacji minimalizującej wpływ wejść niesterowalnych.

W takim schemacie, zminimalizowanie normy od w do z będzie oznaczać zminimalizowanie wpływu wejścia niesterowalnego „w” na wyjście układu.

4.4.3. Sterowanie odporne

Aby znaleźć regulator K minimalizujący wpływ niepewności modelu na efekt sterowania, można posłużyć się następującym schematem:



Rysunek 4.7: Schemat syntezy regulatora minimalizującego wpływ niepewności bezstrukturalnej modelu

Na schemacie powyżej linią przerywaną zaznaczono transmitancję niepewności bezstrukturalnej – najbardziej ogólny przypadek niepewności modelu. Przez zminimalizowanie normy od w do z , znajduje się regulator minimalizujący wpływ takiej niepewności. W schemacie tym bardzo istotna jest waga Wunc, która opisuje w której części modelu pojawia się niepewność. Przedstawiony model jest tylko przykładem; Szczegółowa implementacja zależy od sposobu przedstawienia niepewności [1] lub celu regulatora (stabilność lub zachowanie jakości sterowania przy niepewności modelu).

4.4.4. Inne zastosowania

Poza przedstawionymi powyżej, podstawowymi zastosowaniami metody H_∞ , w literaturze znajduje się rozwiązania dotyczące:

- filtrowania optymalnego względem normy H_∞ , inaczej optymalnego estymatora stanu [5] (w kontraście do filtrowania Kalmana)
- zapobiegania nasycaniu wyjść przez dodanie wewnętrznego, nieliniowego sprzężenia [1]
- bezuderzeniowego przełączania regulatorów przez zastosowanie obserwatora stanów w „równoległym” regulatorze on-line [1]
- Uwzględnianie wyników pomiarów tej samej wartości różnymi sensorami [3]

Ponadto z syntezą regulatora H_∞ związane jest zagadnienie redukcji modelu [1], [2], [3]

ponieważ regulatory H_∞ mają rząd obiektu (który zawiera również często redundantny opis dynamiki sensorów i aktuatorów), a zatem często wysoki.

Rozdział 5: Modelowanie obiektu sterowania

5.1. Wprowadzenie do zasad modelowania obiektów sterowania

Stosowane są dwa główne podejścia do modelowania obiektów:

- podejście „Głównej Zasady Fizycznej” („First Principle Modeling”) - modelowanie na zasadzie znanych praw fizycznych; parametry ustala się na drodze projektowania, lub pomiaru bezpośredniego; brakujące parametry znajduje się przy pomocy metod identyfikacji.
- podejście „Czarna skrzynka” – dla obiektów liniowych, przyjęcie modelu opartego o
- równania różniczkowe lub
- różnicowe o nieznanymi współczynnikami.

Rząd równania i jego współczynniki wyznacza się na drodze identyfikacji. Dla obiektów nieliniowych stosuje się modele rozmyte, neuronowe, lub stochastyczne, i inne.

Stworzenie poprawnego modelu fizycznego i matematycznego obiektu sterowania pozwala na:

- uzyskanie wglądu w zasady rządzące końcowym zachowaniem się obiektu,
- przebadanie wpływu zmiany parametrów na zachowanie się obiektu
- badania symulacyjne obiektu w połączeniu z proponowanym regulatorem
- modelowanie ewentualnych zmian w obiekcie które ułatwiłyby sterowanie

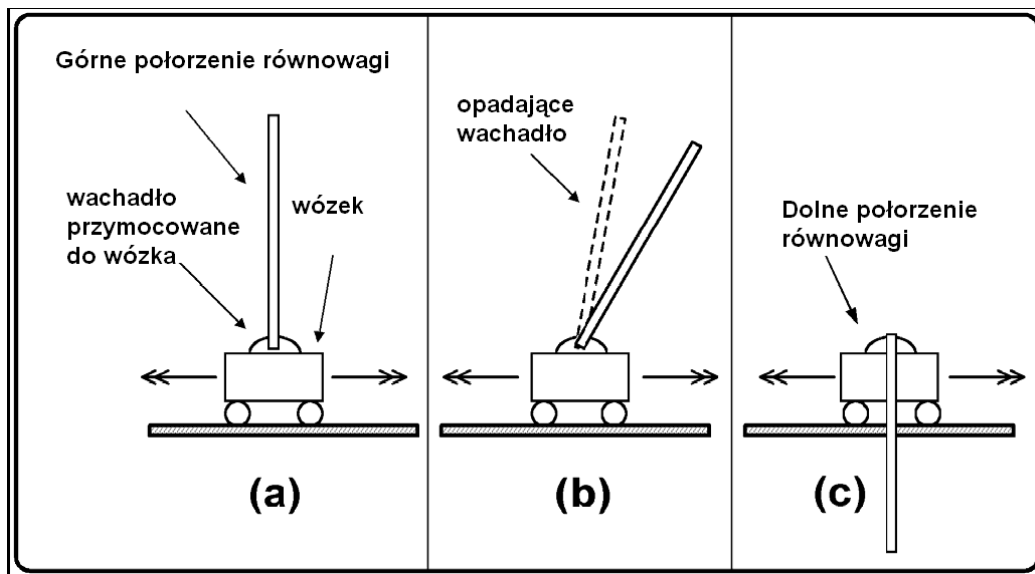
Prawidłowy model fizyczny obiektu powinien uchwycić wszystkie znaczące właściwości obiektu, to jest takie, które znacząco wpływają na jego zachowanie. Dokładne i szczegółowe modelowanie nie zawsze jest możliwe, a często wręcz nie pożądane: model powinien „ukrywać” właściwości obiektu które mają niewielki wpływ na jego zachowanie.

Właściwości fizyczne, których nie da się łatwo opisać, modeluje się metodą czarnej skrzynki.

Stałym problemem jest niepewność parametrów i trudno- lub nie modelowane zachowanie układu, wynikające z ograniczeń pomiarowych. W takim przypadku łączy się dwie metody modelowania; Jeśli tylko to możliwe, stosuje się podejście Głównej Zasady Fizycznej, ponieważ umożliwia ona wgląd w podstawowe przyczyny takiego a nie innego zachowania się obiektu, oraz pozwala na przewidywanie zmian w zachowaniu w razie zmian parametrów. Istotnym czynnikiem w doborze struktury modelu jest również ograniczenie ilości parametrów w modelu do tych, które mają najistotniejszy wpływ na jego zachowanie.

5.2. Stanowisko z wahadłem odwróconym

Stanowisko „Wahadło Odwrócone” pozwala na wykonanie szeregu interesujących eksperymentów, które mogą być użyte w procesie dydaktycznym. Uniwersalny charakter stanowiska pozwala na testowanie różnorodnych algorytmów sterowania, a zatem na pracę badawczą. Zasadę działania wahadła ilustruje rysunek:



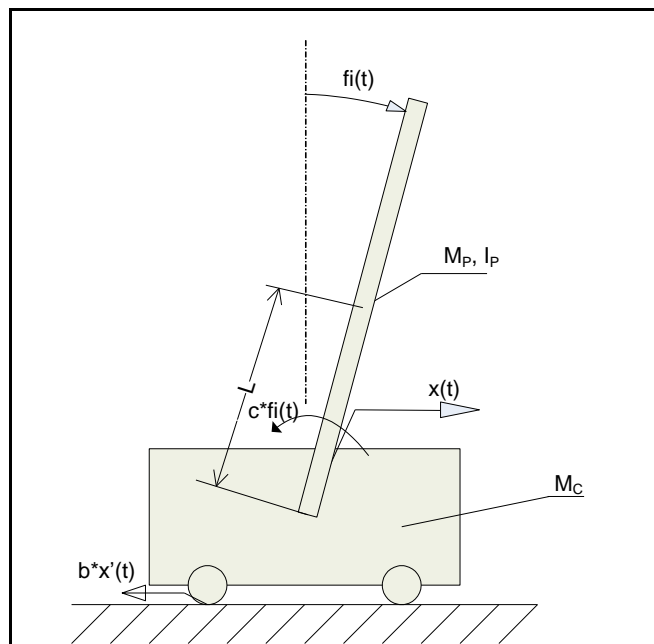
Rysunek 5.1: Dwa położenia równowagi wahadła

Wózek porusza się ruchem prostoliniowym wzdłuż szyny, jest napędzany silnikiem. Wahadło zamocowane jest na wózku w sposób swobodny (minimalizujący tarcie obrotowe), nie napędzane. Wahadło ma dwa położenia równowagi: dolne (stabilne asymptotycznie) oraz górne (niestabilne). Dynamika ruchu układu wózek-wahadło jest nieliniowa.

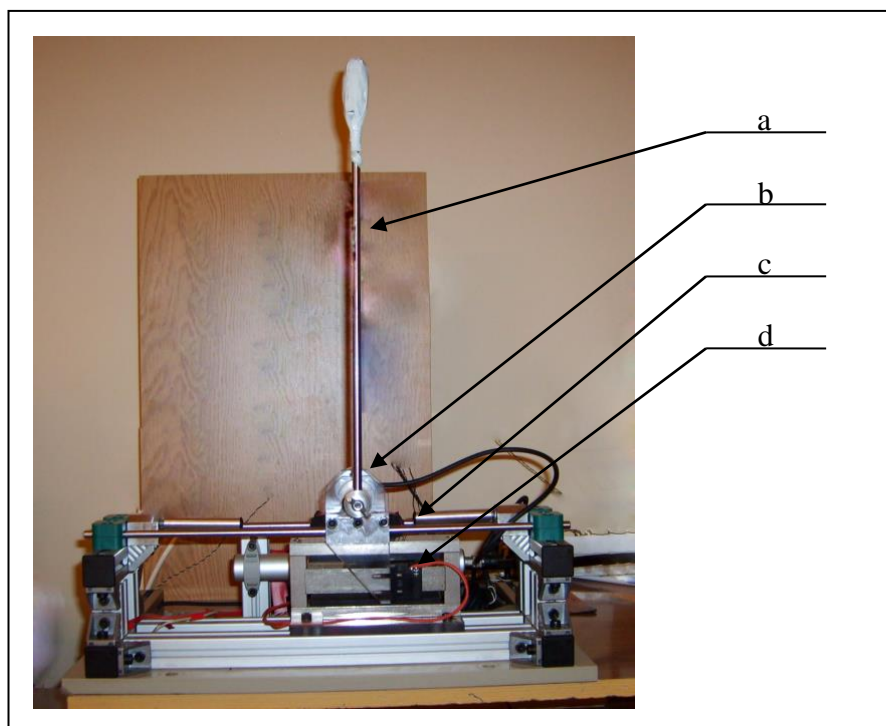
Niestabilność, nieliniowość, a przy tym widowiskowość całego eksperymentu sprawia, że układ ten jest interesującym obiektem do badań.

5.3. Model matematyczny

Oto schemat mechaniczny układu z wahadłem odwróconym:



Rysunek 5.2: Schemat ideowy wahadła odwróconego i jego główne parametry: M_C - masa wózka; M_P - masa wahadła, I_P - moment bezwładności wahadła; b - współczynnik tarcia liniowego; c - współczynnik tarcia obrotowego; L - odległość środka masy wahadła od punktu jego zawieszenia; $x(t)$ - położenie wózka; $f_i(t)$ - kąt obrotu wahadła względem pozycji górnej

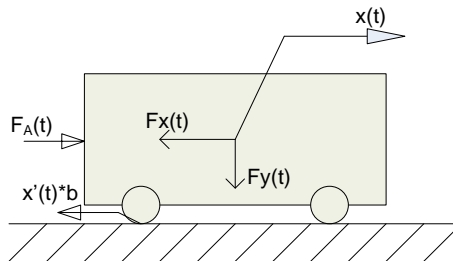


Rysunek 5.3: Zdjęcie stanowiska z wahadłem odwróconym: a) wahadło; b) łożysko wahadła; c) łożysko liniowe wózka; d) silnik liniowy

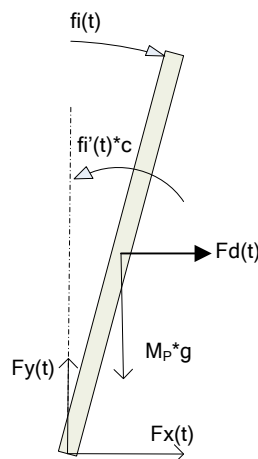
5.3.1. Model fizyczny

W celu uzyskania możliwie prostego modelu matematycznego, przyjęto model w którym tarcie wiskotyczne (liniowo zależne od prędkości). Dla modelu zastosowano klasyczną dynamikę Newtona.

Aby napisać równania opisujące dynamikę układu, niezbędne jest uwolnienie ruchomych mas od więzów:



Rysunek 5.4: Wózek uwolniony od więzów pochodzących od wahadła: $F_a(t)$ – siła pochodząca od silnika; $x'(t)*b$ – siła tarcia; $x(t)$ – położenie wózka; $F_x(t)$, $F_y(t)$ – siły pochodzące od więzów geometrycznych



Rysunek 5.5: Wahadło uwolnione od więzów pochodzących od wózka: $f_i(t)$ – kąt wychylenia wahadła; $f_i'(t)*c$ – moment tarcia obrotowego; $F_d(t)$ – siła zakłócenia; M_p*g – siła od przyciągania ziemskiego; $F_x(t)$, $F_y(t)$ – siły pochodzące od więzów geometrycznych

Tak rozłożony układ można opisać czterema równaniami różniczkowymi z czterema niewiadomymi, bazując na prawach dynamiki Newtona. Z 2-giego prawa Newtona dla wahadła, otrzymujemy:

$$F_y(t) - M_p g = M_p \frac{d^2}{dt^2} (L \cos f_i(t)) \quad (5.1)$$

$$F_x(t) + F_d(t) = M_p \frac{d^2}{dt^2} (x(t) + L \sin f_i(t)) \quad (5.2)$$

Biorąc momenty sił względem środka masy wahadła dostajemy równanie momentów:

$$I_p \frac{d^2}{dt^2} f_i(t) + c \frac{d}{dt} f_i(t) = F_y L \sin f_i(t) - F_x(t) L \cos f_i(t) + F_d(t) \quad (5.3)$$

Z drugiego prawa Newtona dla wózka otrzymujemy:

$$F_A(t) - F_x(t) = M_c \frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) \quad (5.4)$$

Gdzie: $F_A(t)$ – siła pochodząca od silnika; $F_d(t)$ - siła zakłócająca; $F_y(t)$ - siły pomiędzy wózkiem a wahadłem; b – współczynnik tarcia liniowego; c – współczynnik tarcia obrotowego; $x(t)$ – pozycja wózka; $f_i(t)$ - kąt obrotu wahadła; M_c - masa wózka; M_p - masa wahadła; I_p – moment bezwładności wahadła; L – odległość pomiędzy środkiem ciężkości wahadła a punktem zamocowania na wózku; g - przyspieszenie ziemskie.

5.3.2. Przekształcenie modelu fizycznego

Model fizyczny przedstawiony w punkcie 5.2.1 przekształcono w programie Mathematica, aby uzyskać zwyczajny układ równań różniczkowych (ODE), czyli taki, w których wyprowadzona jest na zewnątrz najwyższa pochodna w każdym z równań:

```
In[23]:= EqP = {Fy[t] - Mp g, Mp D[D[x[t], t], t] - I Cos[f_i[t], t],
Fx[t] - Fd[t], Mp D[D[x[t], t], t] - I Sin[f_i[t], t],
Ip D[D[f_i[t], t], t] - c D[f_i[t], t],
Fy[t] - L Sin[f_i[t], t] - Fx[t] - I Cos[f_i[t], t],
Fa[t] - Fx[t] - Mc D[D[x[t], t], t] - b D[x[t], t]};
EqS = Solve[EqP, Fy[t], Fx[t], x'[t], fi'[t]];
subs = {Ip -> 0.2, Mp -> 0.2, Fa[t] -> 0, L -> 0.2, g -> 9.81,
Mc -> 0.5, Mp -> 0.2, c -> 0.001, b -> 1.5};
EmEq = {Enech[t] -> 0.5 Mp Mc x'[t]^2 -> 0.5 Ip fi'[t]^2 ->
0.5 Mp L fi'[t]^2 -> Mp g L Cos[f_i[t], t]};
EqD = {EqS[[1, 2, 1]], EqS[[1, 2, 2]],
EqS[[1, 4, 1]], EqS[[1, 4, 2]]};
TraditionalForm[EqD]
```

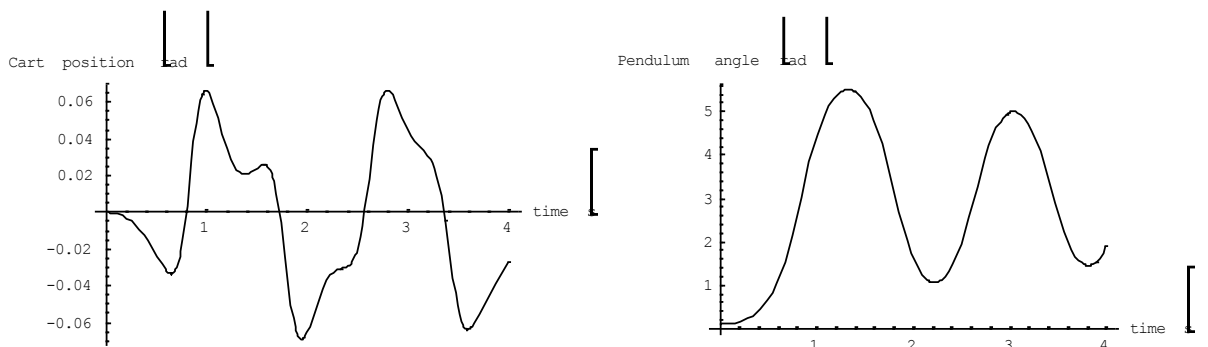
(5.5)

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi} &= \frac{1}{L^2} \left[\sec^2 \varphi \dot{\varphi}^2 - 2M_p^2 \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^2 t^2 L^4 - M_p^2 \sin 4\varphi \dot{\varphi}^2 t^2 L^4 - 6M_p \cos \varphi \dot{\varphi} t \right. \\
 &\quad \left. F_a t L^3 - 2M_p \cos 3\varphi \dot{\varphi} t F_a t L^3 - 6M_c \cos \varphi \dot{\varphi} t F_d t L^3 - 2M_c \cos 3\varphi \dot{\varphi} t F_d t L^3 - 2g M_p^2 \sin \varphi t L^3 - 2g M_c M_p \sin \varphi t L^3 \right. \\
 &\quad \left. 2g M_p^2 \sin 3\varphi t L^3 - 2g M_c M_p \sin 3\varphi t L^3 - 6b M_p \cos \varphi \dot{\varphi} t x^2 t L^3 - 2b M_p \cos 3\varphi \dot{\varphi} t x^2 t L^3 - 4c M_c \dot{\varphi} t L^2 - 4c M_p \dot{\varphi} t L^2 \right. \\
 &\quad \left. 4c M_c \cos 2\varphi \dot{\varphi} t L^2 - 4c M_p \cos 2\varphi \dot{\varphi} t L^2 \right] \\
 \ddot{x} &= \frac{1}{L^2} \left[2M_p^2 \sin \varphi \dot{\varphi}^2 L^3 - 2M_p F_a t L^2 - M_p F_d t L^2 - M_p \cos 2\varphi \dot{\varphi} t F_d t L^2 - g M_p^2 \sin 2\varphi t L^2 \right. \\
 &\quad \left. 2b M_p x^2 t L^2 - 2I_p M_p \sin \varphi \dot{\varphi}^2 t L - 2c M_p \cos \varphi \dot{\varphi} t L - 2I_p F_a t - 2I_p F_d t - 2b I_p x^2 t \right] \\
 &\quad \left[M_p^2 L^2 - 2M_c M_p L^2 - M_p^2 \cos 2\varphi t L^2 - 2I_p M_c - 2I_p M_p \right]
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Taka postać równań jest wygodna do rozwiązywania dowolną metodą numeryczną; dla przykładowych danych uzyskano następujące przebiegi:

```

In[126]:= tk = 4;
subs = {Ip -> 0.2, c -> 0.2, b -> 0.2, Fa -> 0, L -> 0.2, g -> 9.81, Mc -> 0.5,
        Mp -> 0.2, c -> 0.001, b -> 1.5};
EqD = {EqS[1, 2, 1], EqS[1, 2, 2], EqS[1, 4, 1], EqS[1, 4, 2]};
sol1 = NDSolve[EqD, subs, {t, 0, tk}, {phi, 0, 0.1}, {phi', 0, 0}, {x, 0, 0},
              {x', 0, 0}, {phi, phi', x, x'}];
Plot[phi, t, sol1, {t, 0, tk},
     AxesLabel -> {"time s", "Pendulum angle rad"}];
Plot[x, t, sol1, {t, 0, tk},
     AxesLabel -> {"time s", "Cart position rad"}];
    
```



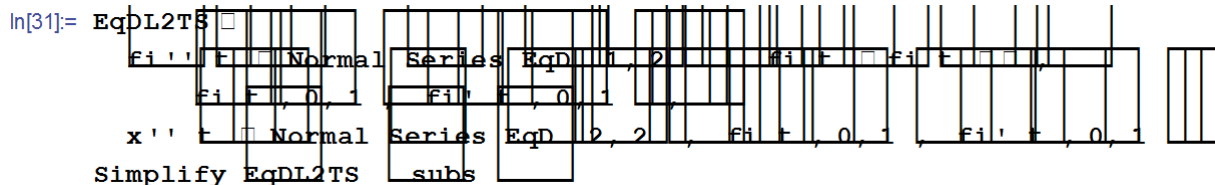
Rysunki 5.6: Przykładowe rozwiązanie równań dynamicznych ruchu.

Uzyskane przebiegi są zbliżone do zachowania które otrzymano w rzeczywistości.

5.4. Linearyzacja modelu matematycznego

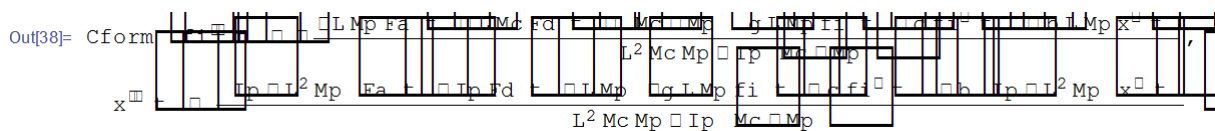
Linearyzację modelu matematycznego otrzymano przez przesunięcie układu współrzędnych tak, aby kąt $fi(t)=0$ oznaczał „wahadło w pozycji dolnej” a następnie rozwinięcie równań 5-4 w szereg Taylora dookoła punktów $fi(t)=0$; $fi'(t)=0$; a następnie odrzuceniu czynników o potęgach wyższych niż jeden:

In[31]= EqDL2TS



(5.8)

Out[38]= Cform



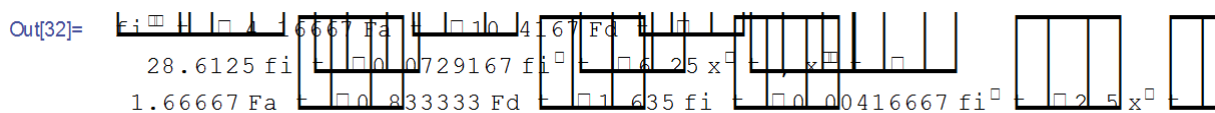
(5.9)

Dla przykładowych danych stanowiska (metoda ich uzyskania zostanie opisana dalej) otrzymano następujący układ równań:

subs

$$\begin{aligned} & \text{Ip} = 0.2, \text{Fa} = 0.2, \text{Fd} = 0.2, \text{L} = 0.2, \text{g} = 9.81, \text{Mc} = 0.5, \text{Mp} = 0.2, \\ & \text{c} = 0.001, \text{b} = 1.5 \end{aligned}$$

Out[32]=



(5.10)

Uwaga: Rozwijanie równań w szereg Taylora nie jest jedyną metodą linearyzacji. Omawianie różnych metod leży jednak poza tematem tej pracy

W równaniach na $fi''(t)$ w 5.10, widoczne jest ujemne sprzężenie od wszystkich zmiennych – co wskazuje na równanie stabilne.

UWAGA: Należy zauważyć, że wejście Fd może zostać użyte jako element służący aproksymacji modelu pełnego, tj. różnicę między modelem pełnym a zlinearyzowanym można określić jako ograniczony wektor zakłóceń do Fd.

5.5. Zapisanie modelu w postaci przestrzeni stanów

Za zmienne stanu przyjęto wielkości x, x', fi, fi' ; wielkości te są jednocześnie wyjściami; zatem:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU & (5.11) \\ Y &= CX + DU \end{aligned}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ fi \\ fi' \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ fi \\ fi' \end{bmatrix}; U = [Fa \quad Fd] \quad (5.12)$$

niech

$$v = \frac{1}{IpMc + IpMp + L^2 McMp} \quad (5.13)$$

Wtedy

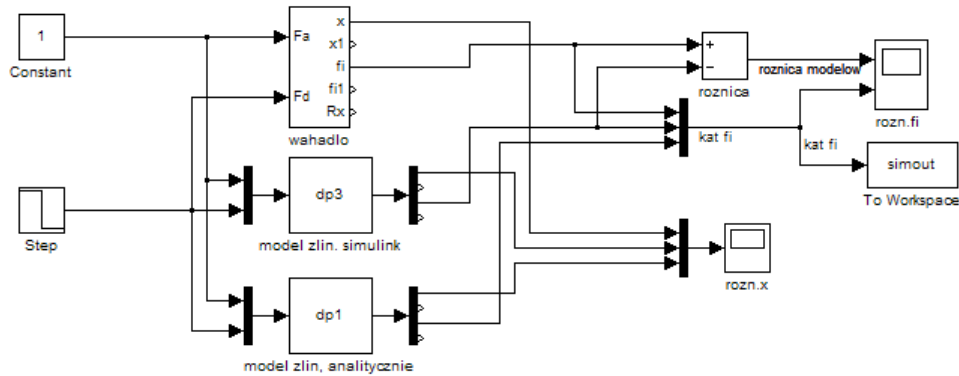
$$A = v \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(bLMp) & -(gLMcMp - gLMp^2) & -(cMc + cMp) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(Ip + L^2 Mp)b & -gL^2 Mp^2 & cLMp \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$B = v \begin{bmatrix} 0 \\ -LMp \\ 0 \\ -(Ip + L^2 Mp) \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D = [0] \quad (5.15)$$

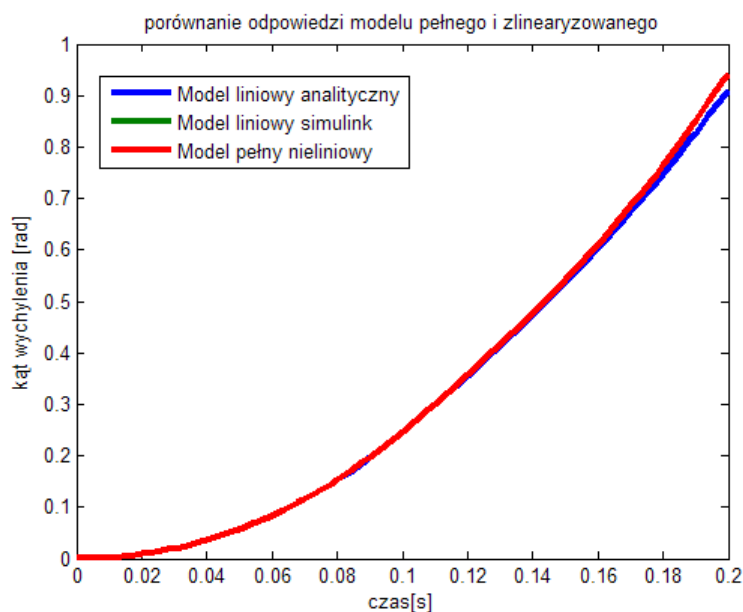
Dla wygody w przyszłych analizach, napisano skrypt budujący te macierze w pliku

ip_synth.m. Dla wahadła w pozycji dolnej napisano skrypt dp_synth.m

Zbadano różnicę pomiędzy modelem pełnym, modelem zlinearyzowanym w Simulinku, a modelem zlinearyzowanym analitycznie:



Rysunek 5.7: Program porównujący modele: wahadlo – model pełny; dp3 – model zlinearyzowany w simulinku; dp1 – model zlinearyzowany analitycznie (ip_comparison.mdl)



Rysunek 5.8: różnica pomiędzy odpowiedzią modelu pełnego a zlinearyzowanego; odpowiedzi nałożone na siebie - nierozróżnialne. (ip_comparison.mdl)

Różnica pomiędzy odpowiedzią modelu pełnego a zlinearyzowanego dla kąta $\varphi < 0.2$ [rad] wynosi mniej niż 1,5%.

5.6. Skalowanie modelu dla metody H_∞

Zgodnie z metodą opisaną w rozdziale 4.1.1, zakładam:

- $\dot{\varphi}_{\max} = 0.17$ [rad/s] - poza tym zakresie zachowanie się wahadła staje się coraz bardziej nieliniowe; oznacza ono również „dopuszczalne” wychylenie wahadła w problemie tłumienia drgań z wahadłem do dołu
- $\varphi'_{\max} = 1$ [rad/s] - spodziewana prędkość kątowa wahadła
- $x_{\max} = 0.04$ [m] - ograniczenie konstrukcyjne stanowiska

- $x'_{\max} = 1[m/s]$ - spodziewana prędkość liniowa wózka
- $Fa_{\max} = 15[N]$ - ograniczenie konstrukcyjne silnika; (uwaga: do syntezy regulatora używam znacznie niższych wartości, rzędu 2-5[N], przy jednoczesnym zezwoleniu na chwilowe przekroczenie tych wartości)

Zatem macierze:

$$y_{\max} = e_{\max} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

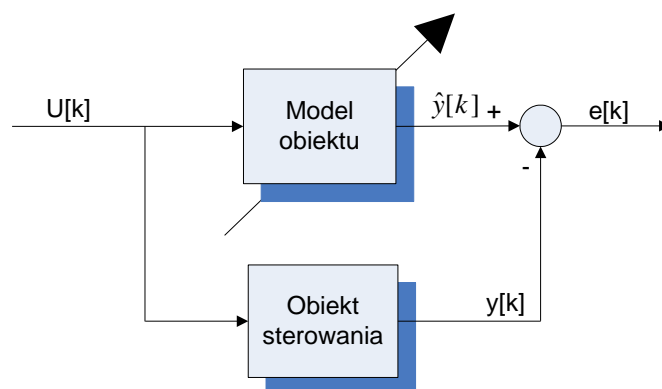
$$u_{\max} = [15]$$

$$r_{\max} = [0.04]$$

Rozdział 6: Identyfikacja obiektu sterowania

6.1. Wprowadzenie do użytej metody identyfikacji

Obiekt sterowania identyfikowano metodą modelu równoległego, czyli błędu wyjściowego.



Rysunek 6.1: Schemat identyfikacji parametrów obiektu metodą modelu równoległego

Użyto pełnego, nieliniowego modelu obiektu, zbudowany w Simulink-u; do znalezienia parametrów obiektu użyto optymalizacji numerycznej.

Ze względu na ilość identyfikowanych parametrów (M_p , M_c , L , I_p , b, c) – zaplanowano następującą serię eksperymentów:

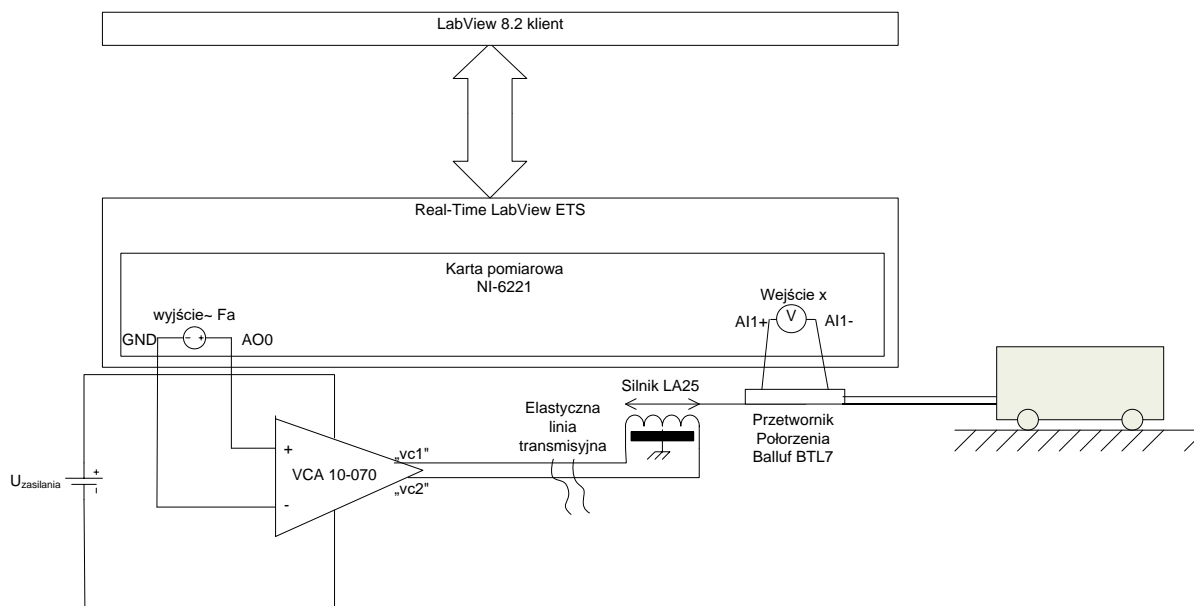
1. Eksperyment przy wymontowanym wahadle – identyfikowane tylko parametry M_p , b ;
2. Eksperyment przy zamocowanym nieruchomo wahadle – identyfikowane tylko parametr M_c
3. Eksperyment w pełnej konfiguracji stanowiska – identyfikowane parametry L , I_p , c

Dzięki takiemu planowi w każdym eksperymencie identyfikuje się podzbiór parametrów dzięki czemu redukuje się niebezpieczeństwo znalezienia lokalnych minimów błędu wyjściowego.

Ze względu na brak możliwości pomiaru prądu ani siły w torze wzmacniacz mocy – wózek, układ ten traktuje się jako całość.

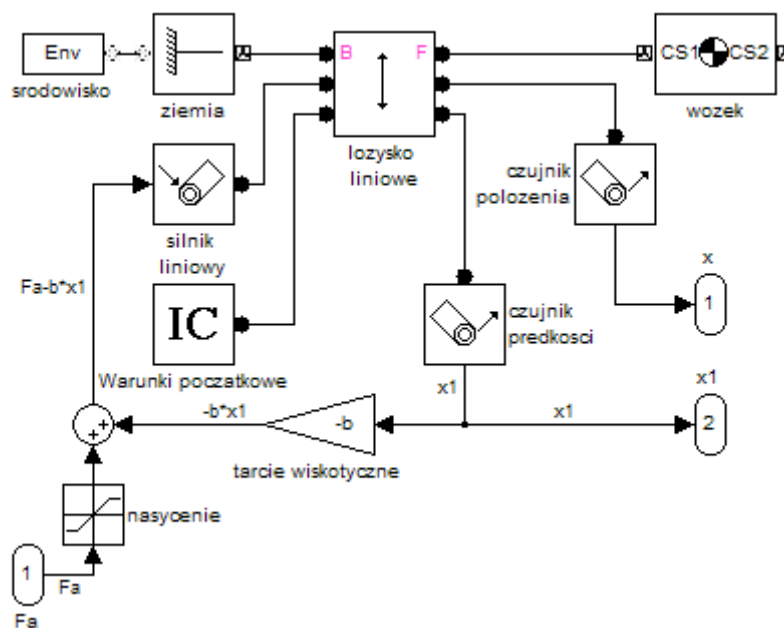
6.2. Eksperyment 1

Podłączono obiekt jak na rysunku:

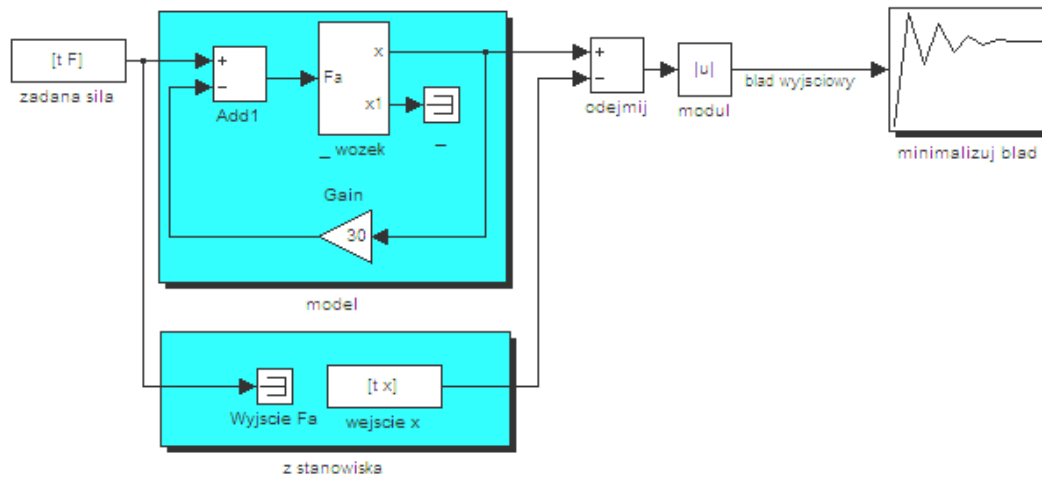


Rysunek 6.2: Schemat pomiarowy użyty do eksperymentu 1

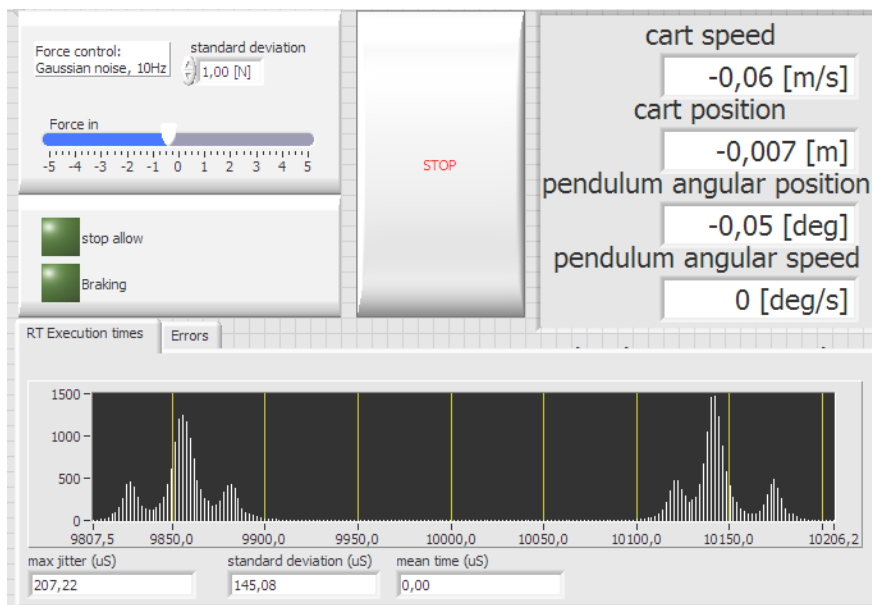
Odpowiada to modelowi w symulunku:



Rysunek 6.3: Model stanowiska w eksperymencie 1



Rysunek 6.4: Model Simulink użyty do minimalizowania błędu wyjściowego



Rysunek 6.5: Interfejs programu do zbierania danych – LabView+RealTime ETS

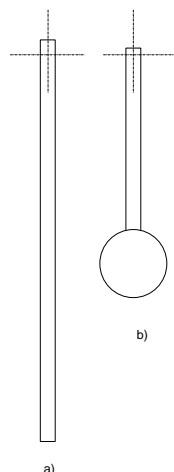
Uzyskany wynik: $M_c = 0.5743$ [kg]; $b = 2.2012$ [N/(m/s)]

6.3. Eksperyment 2

Do stanowiska jak w eksperymencie 1 przymocowano wahadło nieruchomo do wózka.

Otrzymano parametry:

wahadło \ parametr	$M_c + M_p$ [kg]	b [N/(m/s)]	wynikowe M_p [kg]
duże	0.743	1.87	0.170
małe	0.717	2.00	0,143

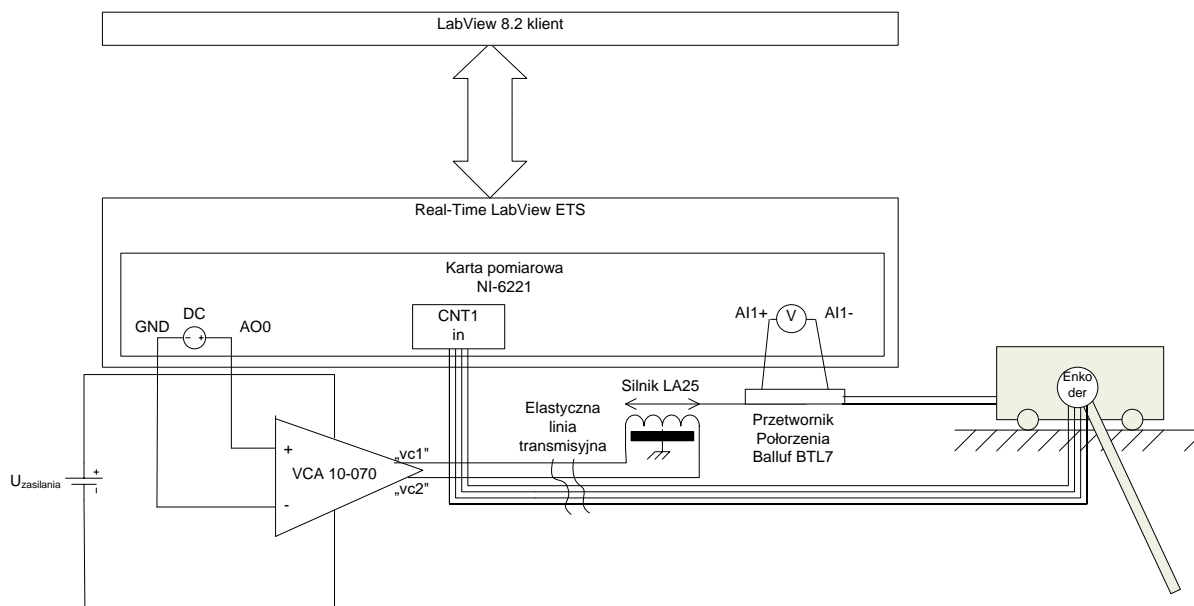


Rysunek 6.6: Szkic użytych wahadeł: a) wahadło duże; b) wahadło małe

Program do zbierania danych uruchomiony został w systemie czasu rzeczywistego LabView+RealTime ETS. Pozwala on na, poza swoją główną funkcją, na badanie parametrów czasowych wykonania programu. Zmierzono nierównomierność czasu próbkowania (jitter) – wyniósł on maksymalnie 207uS.

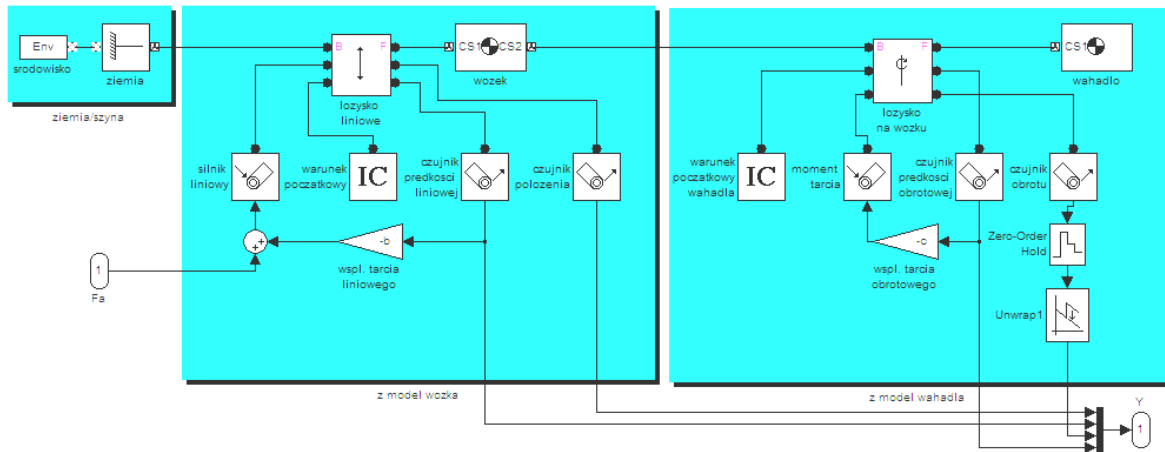
6.4. Eksperyment 3

Podłączono następujący układ pomiarowo-sterujący:

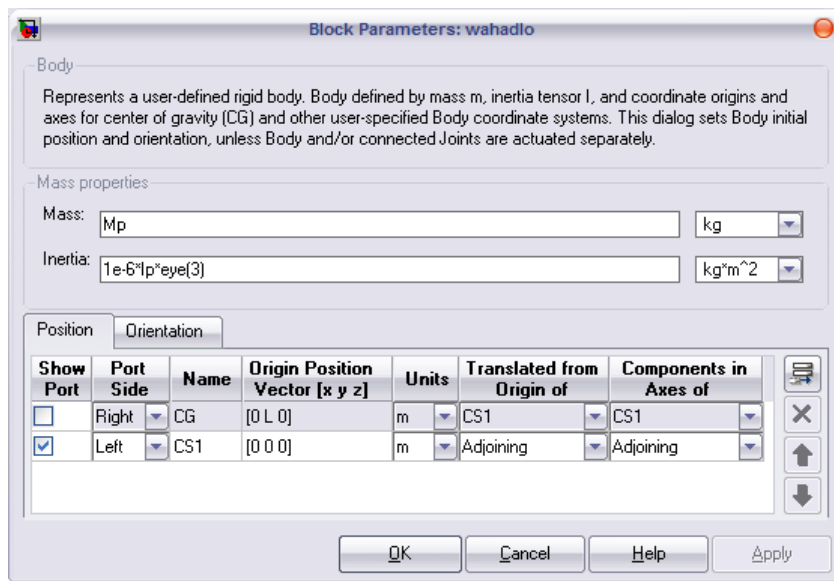


Rysunek 6.7: Schemat pomiarowy użyty do eksperymentu 3

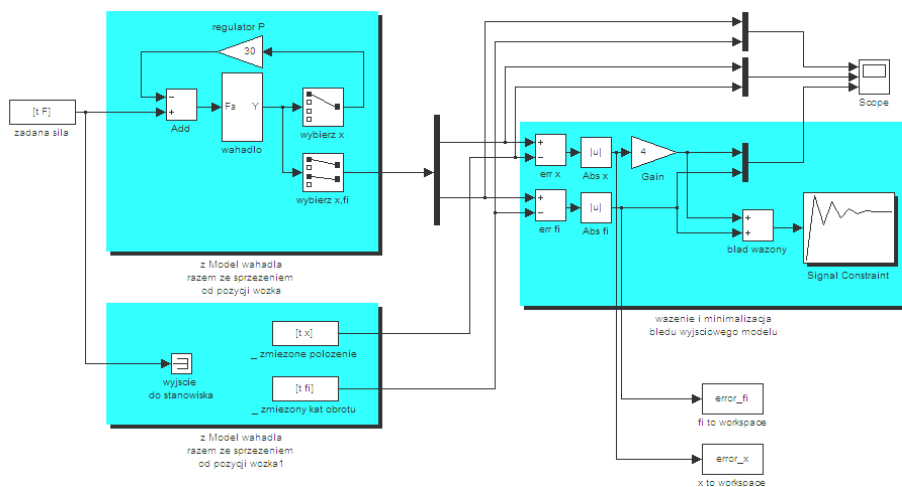
Stanowisko skonfigurowano w sposób jak na rys. 5-1, tj. z wahadłem zamontowanym obrotowo. Odpowiada to następującemu modelowi w Simulinku:



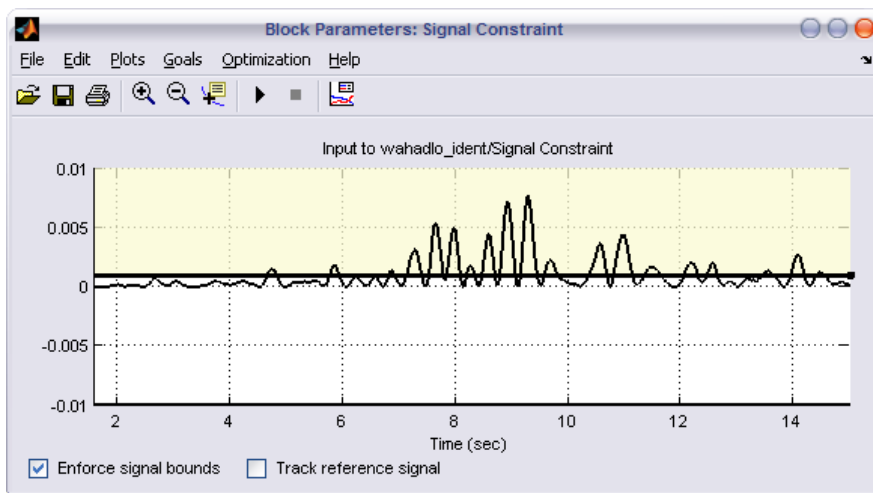
Rysunek 6.8: Model stanowiska z wahadłem w Simulink-u



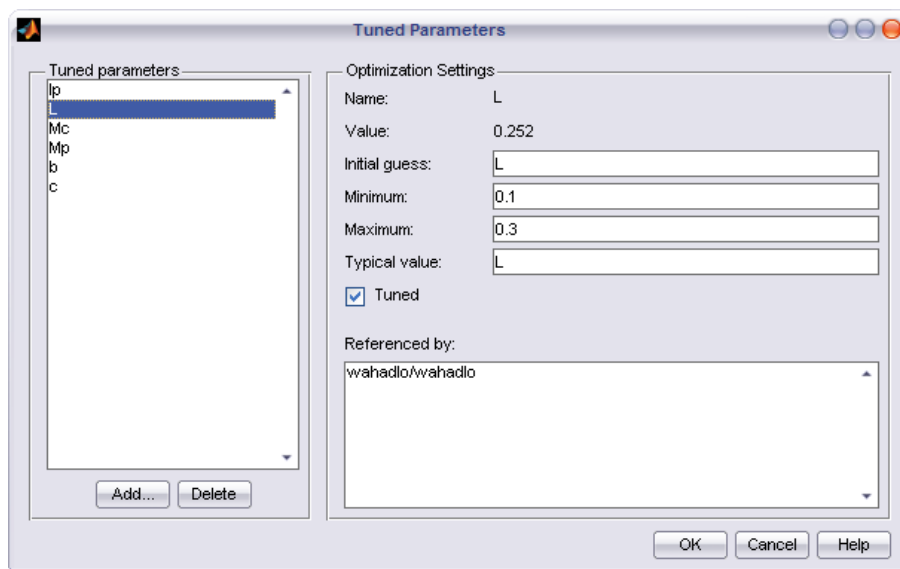
Rysunek 6.9: Parametryzacja właściwości modelu. Tu: właściwości bloczka „wahadlo” –Wprowadzenie M_p , I_p jako zmiennych pozwala na modyfikowanie ich wartości z zewnątrz.



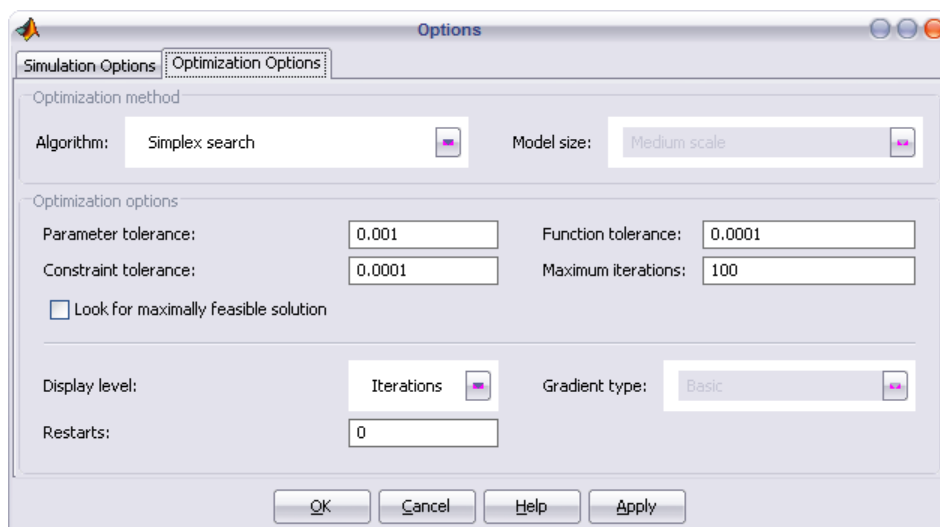
Rysunek 6.10: Model w Simulinku do minimalizacji błędu wyjściowego modelu



Rysunek 6.11: Okno poszukiwania parametrów minimalizujących błąd wyjściowy. Żółte pole oznacza „obszar zabroniony” dla sygnału błędu wyjściowego (czarny).



Rysunek 6.12: Okno ustawiania parametrów do poszukiwania



Rysunek 6.13: Opcje poszukiwania parametrów

Otrzymano następujące parametry obiektu:

wahadło\parametr	$I_p[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$	$L[\text{m}]$	$c[\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}]$
duże	0.001	0.252	0.001
małe	0.002	0.117	0.001

Uzyskano średni błąd dopasowania modelu na poziomie x : $\pm 2\text{mm}$; f_i : $\pm 0.025\text{rad}$;

Rozdział 7: Analiza sterowalności obiektu

7.1. Cel przeprowadzania analizy sterowalności

Celem przeprowadzenia analizy sterowalności jest zbadanie ograniczeń w możliwościach sterowania obiektem. Przy okazji, analiza sterowalności dostarcza ważnych wskazówek co do projektowania regulatora. Na podstawie uzyskanych wyników można w szczególności

- dobrać czas próbkowania do sterowania cyfrowego
- wstępnie dobrać wagi do syntezy regulatorów
- określić oczekiwania i granice w jakości sterowania
- określić kompromisy i decyzje, które trzeba podjąć podczas syntezy regulatora

7.2. Wstępna analiza obserwowalności i sterowalności

Aby sprawdzić obserwowalność układu w sensie Kalmana [3] buduje się macierz obserwowalności Δ :

$$\Delta = \left[C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T \right] \quad (7.1)$$

gdzie n – rząd macierzy A ; Układ jest całkowicie obserwowalny, jeśli rząd macierzy Δ jest równy n . [2]

Aby sprawdzić sterowalność układu w sensie wprowadzonym przez Kalmana [3], buduje się macierz sterowalności Γ :

$$\Gamma = \left(B, AB, \dots, A^{n-1} B \right) \quad (7.2)$$

Przy założeniu nieograniczonego wektora sterowania U , układ jest całkowicie sterowalny, jeśli rząd macierzy Γ jest równy n . [2]

Zlinearyzowany model stanowiska jak w 5.13 jest sterowalny i obserwowalny wg. założeń 5.15 i 5.16;

Założenie nieograniczonego wektora sterowania jest bardzo istotne w praktyce. Może okazać się, że układ sterowalny według tezy wzoru 5.16 jest praktycznie niesterowalny gdyż wymaga nierealizowalnej amplitudy (energii) lub pasma sygnału sterującego.[1]

7.3. Pełna analiza sterowalności

Poniższą analizę przeprowadzono według procedury podanej w [1], przy założeniu że parametry stanowiska są znane (patrz: rozdział 6).

7.3.1. Skalowanie obiektu

Skalowania obiektu dokonano w rozdziale 5.6.

7.3.2. Sprawdzenie minimalności realizacji obiektu

Sprawdzenia dokonano przy pomocy skryptu `make_linmod.m` w Matlabie. Użyty model jest swoją minimalną realizacją.

7.3.3. Sprawdzenie sterowalności funkcjonalnej

Sterowalność funkcjonalna oznacza możliwość kontrolowania każdego z wyjść obiektu niezależnie. Aby było to możliwe, wymagane jest

- aby obiekt miał co najmniej tyle samo wejść ile wyjść
- aby rząd obiektu był równy liczbie wyjść

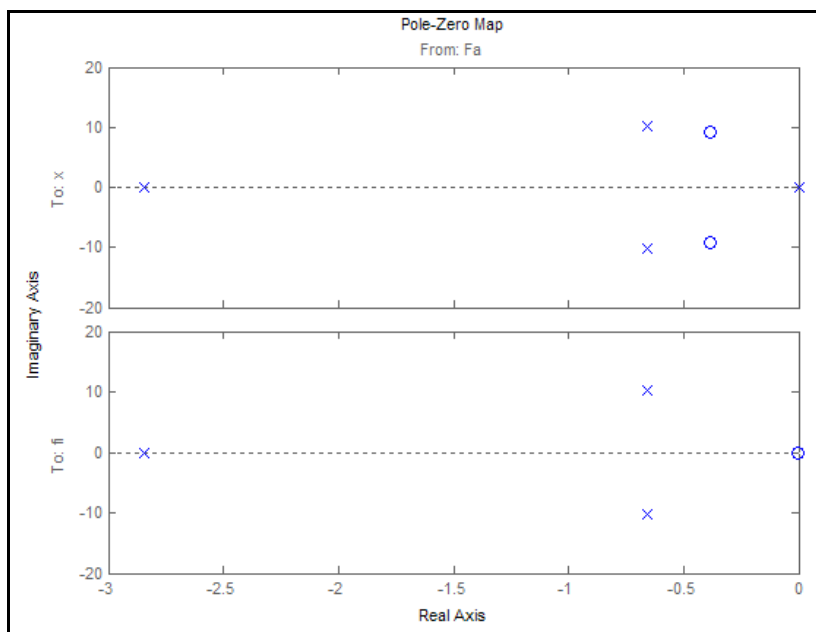
Analizowane stanowisko ma więcej wyjść (x, f_i) niż wejść (F_a); zatem nie jest możliwe sterowanie tych wyjść niezależnie.

7.3.4. Sprawdzenie biegunów obiektu

Transmitancje do wyjść dane są równaniami:

```
Zero/pole/gain from input "Fa" to output...
      1.7637 (s^2 + 0.7685s + 83.85)
x:  -----
      s (s+2.845) (s^2 + 1.322s + 103.9)

      15.0741 s
fi: -----
      (s+2.845) (s^2 + 1.322s + 103.9)
```



Rysunek 7.1: Rozlokowanie biegunów (krzyżyki) i zer (kółka)

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
0.00e+000	-1.00e+000	0.00e+000
-2.85e+000	1.00e+000	2.85e+000
-6.61e-001 + 1.02e+001i	6.48e-002	1.02e+001
-6.61e-001 - 1.02e+001i	6.48e-002	1.02e+001

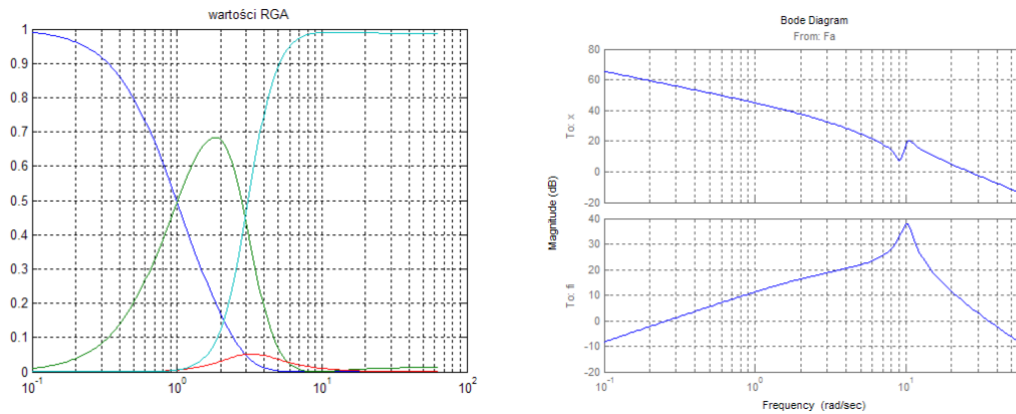
Obiekt jest astatyczny, poza tym wszystkie bieguny leżą po lewej stronie płaszczyzny Gaussa. Należy zwrócić uwagę na bardzo mały współczynnik tłumienia ($6,48 \cdot 10^{-2}$). Potrzebne jest sterowanie zwiększające tłumienie w układzie.

7.3.5. Sprawdzenie zer obiektu

Wszystkie zera leżą po lewej stronie płaszczyzny Gaussa.

7.3.6. Sprawdzenie charakterystyki częstotliwościowej $|G(j\omega)|$ i obliczenie macierzy RGA

Wartości macierzy RGA (Relative Gain Array) w funkcji częstości wyliczane są przy pomocy skryptu `make_linmod.m`:

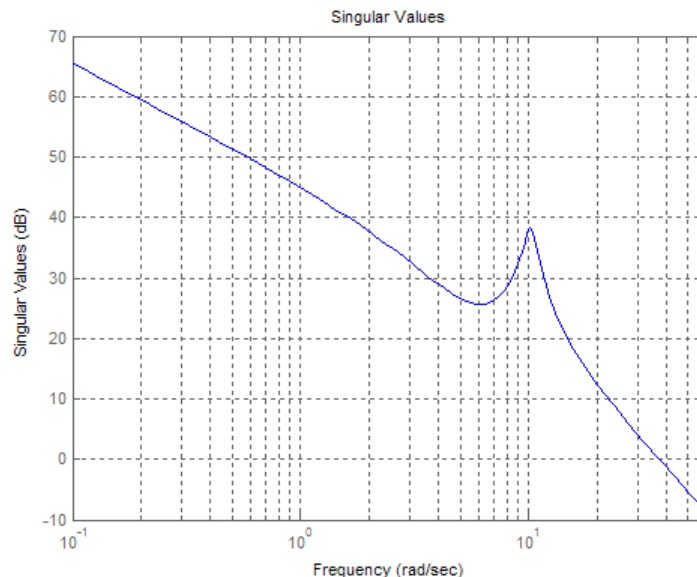


Rysunek 7.2: Porównanie wartości macierzy RGA i odpowiedzi częstotliwościowej

Wniosek: Dla częstości krytycznych: 0,24[rad/s], 25,5[rad/s], 35,8[rad/s], żadna z wartości macierzy RGA nie wzrasta powyżej 1.

7.3.7. Wykreślenie wartości osobliwych obiektu

Wykres wartości osobliwych uzyskano przy pomocy skryptu `make_linmod.m`:



Rysunek 7.3: Wartości osobliwe obiektu. dla niskich częstości ($< 1\text{rad/s}$) dominujący wpływ ma część całkująca obiektu. Przy częstości 10rad/s wyeksponowana jest częstość rezonansowa wahadła.

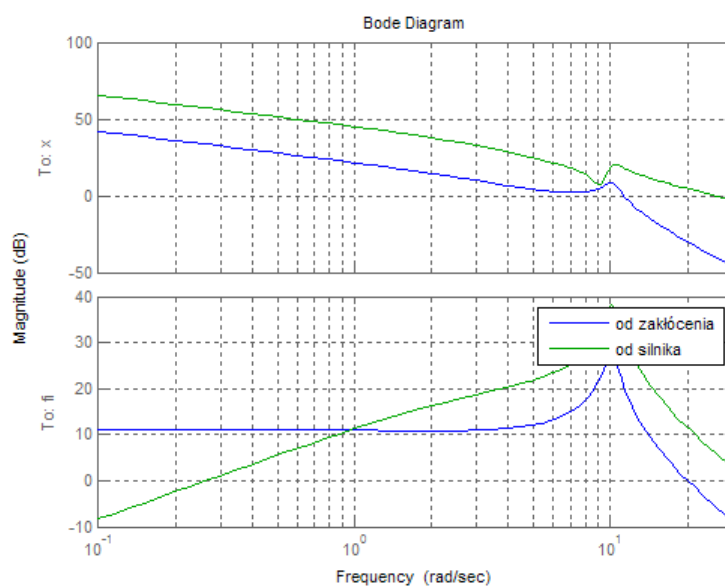
7.3.8. Analiza wartości osobliwych obiektu

Wartości osobliwe obiektu spadają poniżej 1 dla częstości ~ 38 [rad/s]. Wniosek: wyjścia obiektu są kontrolowalne do częstości około 7,4Hz. (powyżej tych częstości wejścia mają mały wpływ na wyjścia)

7.3.9. Sterowalność ze względu na zakłócenia

Regulacja jest niezbędna dla wszystkich częstości, dla których $|Gd(j\omega)| > 1$:

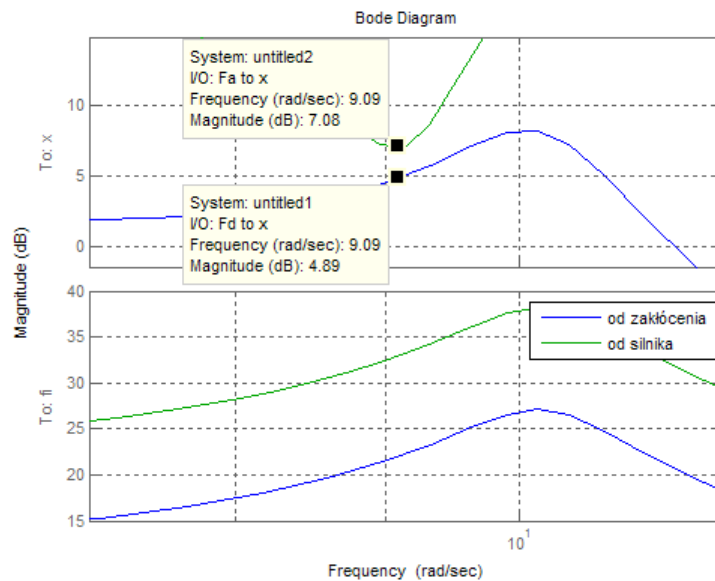
(uwaga: poniższa analiza dotyczy obiektu przeskalowanego; a zatem odpowiedź 0dB oznacza „pełne wystereowanie” albo nasycenie wyjścia)



Rysunek 7.4: Wykres modułu transmitancji od zakłócenia w porównaniu do modułu transmitancji obiektu

Wniosek: potrzebny jest regulator dający pasmo przenoszenia co najmniej do 20[rad/s] (3,2Hz).

Należy zwrócić uwagę na spadek wzmocnienia do x przy 9[rad/s]:



Rysunek 7.5: Zmniejszona wydajność silnika przy częstotliwości 9[rad/s] ze względu na interakcję z wahadłem

Dla tej częstotliwości możliwość tłumienia zakłóceń jest najmniejsza - różnica zaledwie 2,6dB dla zamodelowanego toru zakłócenia. Jeżeli amplituda zakłócenia przy tej częstotliwości wzrośnie o więcej niż 2,6dB w stosunku do modelowanego (a zatem do 1,34N), żaden regulator nie uniknie nasycenia wejścia.

Pik przy 10[rad/s] oznacza, że regulator powinien zapewnić tłumienie co najmniej 38dB aby zapobiec wahaniu wahadła przy poruszaniu wózkiem – powinien odfiltrować częstotliwość rezonansową.

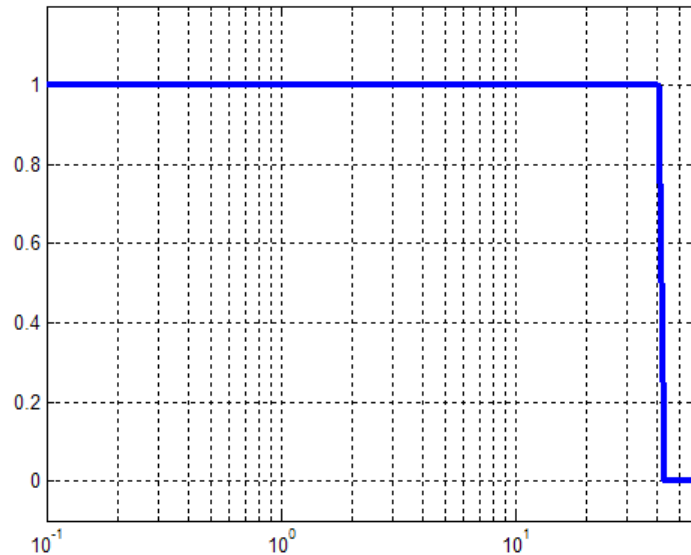
Ponadto regulator ten powinien dać $S < 1/\|gd\|_2$, gdzie $S = (1 + GK)^{-1}$, $\|gd\|_2$ - norma 2 z sygnału zakłócenia; sprawdzenie tego warunku jest jednak możliwe dopiero po zsyntezowaniu regulatora K.

7.3.10. Sterowalność ze względu na nasycenie wejść przy istnieniu zakłócenia

Aby zapewnić możliwość kompensacji sygnału zakłócającego sygnałem sterowania, przy założeniu nie dochodzenia wejść sterujących do nasycenia, dla obiektów MIMO stosuje się przybliżony warunek [1, str. 246]: dla każdej częstotliwości

$$\sigma_i(G) \geq |u_i^H g_d|^{-1}, \text{ dla częstotliwości gdzie } |u_i^H g_d| > 1 \quad (7.3)$$

gdzie $\sigma_i(G)$ - i-ta wartość osobliwa G przy danej częstotści; u_i^H - kierunek działania wejścia i; transmitancja od zakłócenia na ten kierunek; Macierz kierunków działania to wektor U uzyskany z rozkładu macierzy na wartości osobliwe: $A = U\Sigma V^H$
Sprawdzenia tego warunku dokonano przy pomocy skryptu test_ctrl02b.m



Rysunek 7.6: Spełnienie warunku (6.3) 1- warunek spełniony; 0 – warunek nie spełniony.

Pierwsza część warunku jest spełniona dla częstotści do ~ 42 [rad/s]; druga dla częstotści do 20rad/s; Wniosek: dla modelowanego zakłócenia wejścia układu nie będą nasycane.

7.3.11. Wzmocnienie zakłóceń przez zera transmitancji zakłócenia leżące po prawej stronie płaszczyzny Gaussa

W modelu zakłócenia nie ma zer leżących po prawej stronie płaszczyzny Gaussa.

7.3.12. Niepewności modelu

Wartości macierzy RGA są miarą bliskości macierzy A układu do macierzy osobliwej. (element (i,j) macierzy RGA wskazuje o ile trzeba zmienić odpowiedni element macierzy A aby uzyskać macierz osobliwą) Wartości te wykreślono na rys. 6.1. Ponieważ jedna z wartości układu jest duża (blisko 1) dla niskich częstotliwości ($<0.5[\text{rad/s}]$) a inna dla wysokich ($>6[\text{rad/s}]$), można wnioskować, że układ jest wrażliwy na niepewność modelu. Układ jest najmniej wrażliwy w pobliżu częstotliwości 1rad/s .

7.4. Podsumowanie

Powyższa analiza wskazuje na pełną sterowalność stanowiska. Możliwe problemy to

- Mała odporność na zakłócenia przy częstotliwości 9rad/s – (częstość rezonansowa układu wahadło-wózek)
- Wpływ niepewności parametrów modelu przy częstotliwościach $<1\text{rad/s}$ i powyżej 6rad/s

Wniosek: obiekt jest sterowalny.

Ponadto z analizy sterowalności wynikają następujące wnioski:

- Aby zapewnić tłumienie wpływu zakłóceń potrzebny jest regulator o paśmie przenoszenia co najmniej $20[\text{rad/s}]$
- Aby przy tym nie wprowadzać wahadła w drgania regulator powinien wykazywać tłumienie co najmniej -38dB dookoła częstotliwości $10[\text{rad/s}]$.

Rozdział 8: Synteza regulatorów dla obiektu sterowania

8.1. Synteza regulatora przy użyciu metody przesuwania biegunów

Metoda przestawiania biegunów transmitancji polega na takiej zmianie wartości macierzy własnych za pomocą sprzężeń od zmiennych stanów. Niech

$$\dot{X} = AX + BU;$$

jeśli $U = -KX$,

to w efekcie

$$\dot{X} = AX - BKX = (A - BK)X \quad (8.1)$$

gdzie K – wektor wzmocnień.

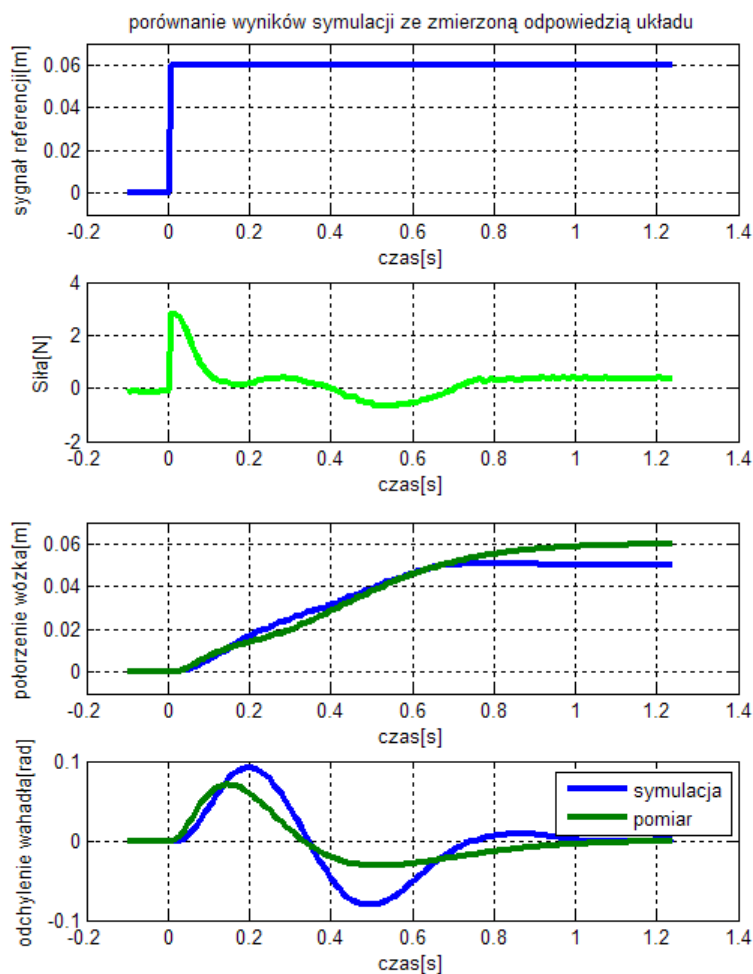
Zatem wartości własne macierzy A można zastąpić wartościami własnymi macierzy $A-BK$. Ograniczeniem jest tutaj wartość wzmocnień K ; Zbyt duże wzmocnienia mogą prowadzić do nasycania wejść układu, i/lub wzmocnienia zakłóceń.

Wartości własne dobrano tak, aby uzyskać odpowiedź bliską aperiodycznej, o możliwie dużym tłumieniu, a jednocześnie nie przekroczyć wartości wzmocnień które prowadziłyby do nadmiernego wzmocnienia szumów pomiarowych. Nie da się uzyskać całkowicie aperiodycznej odpowiedzi, gdyż oznaczałoby to wymóg wielokrotnych wartości własnych, a to z kolei jest możliwe tylko przy użyciu wielu wejść. Na podstawie analizy sterowalności, przy udziale symulacji, wybrano położenia wartości własnych:

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
$-8.78e+000 + 1.96e+000i$	$9.76e-001$	$9.00e+000$
$-8.78e+000 - 1.96e+000i$	$9.76e-001$	$9.00e+000$
$-9.21e+000 + 2.15e+000i$	$9.74e-001$	$9.46e+000$
$-9.21e+000 - 2.15e+000i$	$9.74e-001$	$9.46e+000$

Przy pomocy skryptu test_pp1.m uzyskano wartości wzmocnień przesuwające wartości własne obiektu w kierunku pożądanym:

```
Kp_do_wpisania:[kx kx1 kfi kf1] = [49.05 18.28 0.31 -0.0004]
```



Rysunek 8.1: Porównanie wyników symulacji ze zmierzoną odpowiedzią układu. (analizuj_odpowiedz_pp.m)

Nie idealne dopasowanie symulacji i odpowiedzi zmierzonej wynika ze zmiany parametrów układu (długości wahadła) już po zidentyfikowaniu. Wózek nie dochodzi do zadanej pozycji 0.06[m] ze względu na tarcie statyczne (brak członu całkującego w regulatorze).

8.2. Synteza regulatora LQR

Regulator LQR optymalizuje współczynnik kosztu

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt \quad (8.2)$$

Gdzie Q,R – macierze wag. Rezultatem syntezy są wzmocnienia od wektora stanu układu.

Wagi dobrano według zalecenia z [4] – aby wartości wag wynosiły

$$w_n = \frac{1}{e^2} \quad (8.3)$$

Gdzie \bar{e} - spodziewana lub żądana wariancja danej zmiennej. Żądane wariancje zmiennych wzięto z rozdziału 5.6 – skalowania układu:

```
ymax=diag([0.04 1 0.17 1]);  
Q=inv(ymax.^2);
```

Żadaną wariancję sterowania przyjęto na 2,5N:

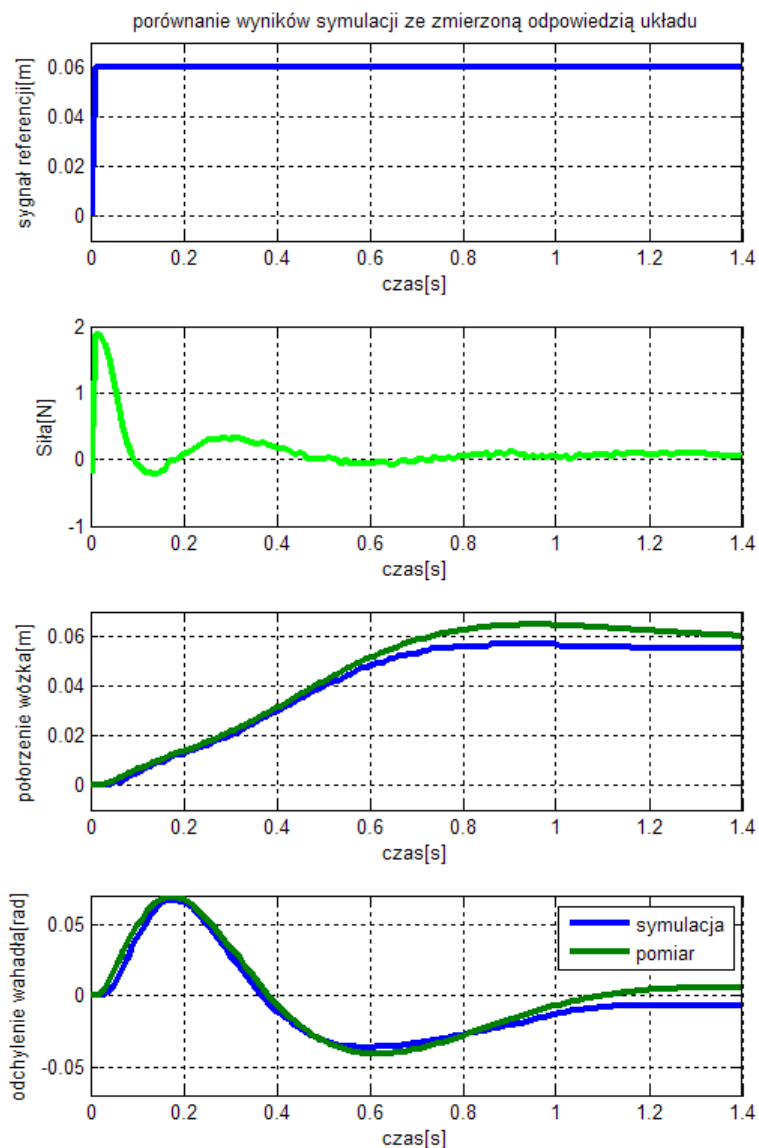
```
R=inv(2.5^2);
```

Syntezę realizuje skrypt test_pp1.m. Otrzymano następujące wzmocnienia od wektora stanu:

```
[Kx Kx1 Kfi Kfi1]=[35.000 9.785 0.204 0.011 ]
```

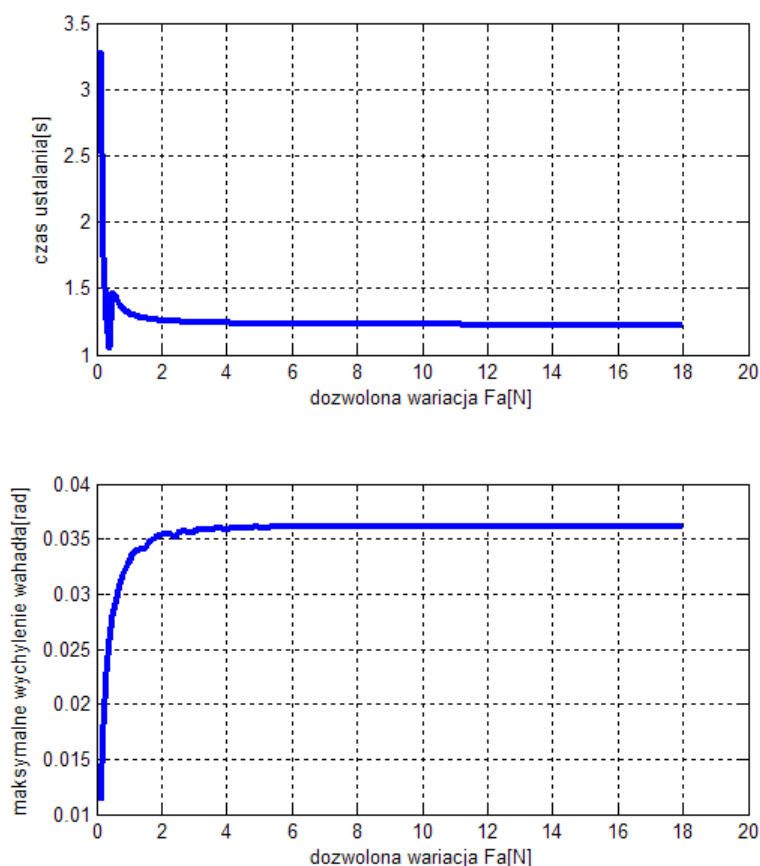
Podobnie jak w równaniu 8.1, wzmocnienia takie przekładają się na przesunięcie wartości własnych obiektu do następujących:

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
-2.95e+000 + 4.46e+000i	5.52e-001	5.35e+000
-2.95e+000 - 4.46e+000i	5.52e-001	5.35e+000
-1.26e+001 + 4.63e+000i	9.39e-001	1.34e+001
-1.26e+001 - 4.63e+000i	9.39e-001	1.34e+001



Rysunek 8.2: Porównanie symulacji z regulatorem LQR i odpowiedzi układu (analizuj_odpowiedz_lqr.m)

Co interesujące, czas ustalania się pozycji wózka nie zależy od agresywności regulatora, ustawianej wagą R:



Rysunek 8.3: Czas ustalania i wychylenie wahadła w funkcji wariacji siły F_a stosowanej przez regulator LQR (badanie_lqr.m). uwaga: minimum przy 0.5N wynika z błędu metody pomiaru czasu ustalania (należy je zignorować).

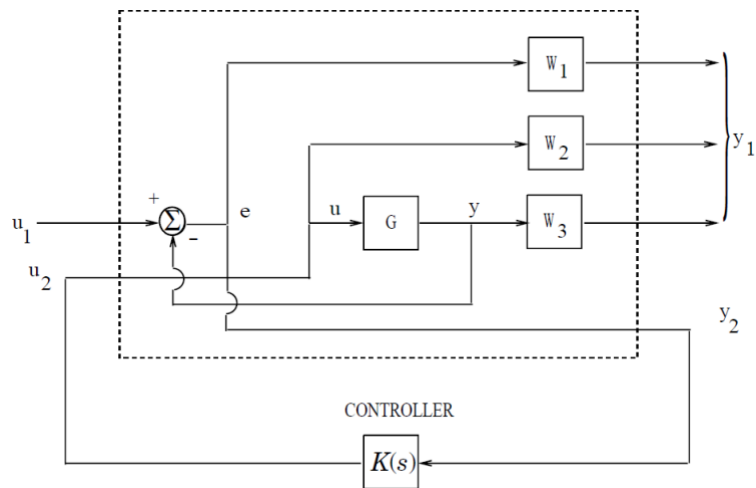
Zachowanie takie wynika z właściwości macierzy Q , której wagi ograniczają maksymalne wychylenie wahadła; krótszy czas ustalania się pozycji wózka można by uzyskać jedynie przez zezwolenie na większe wychylenie wahadła. Jest to też wynik zgodny z wnioskami z rozdziału 7. W praktyce należy wybrać najmniejszą możliwą wartość dozwolonej wariacji F_a , która daje zadowalający czas ustalania (tu: 2,5N).

8.3. Synteza regulatora H_∞

8.3.1. Podejście uproszczone - regulator H_∞ „prosty”

Aby zsyntezować regulator skorzystano z poleceń matlaba:

$P = \text{augw}(G, W1, W2, W3)$ oraz $\text{hinfsyn}(P)$; gdzie G – obiekt sterowania; $W1, W2, W3$ – wagi do syntezy według schematu 8.4:



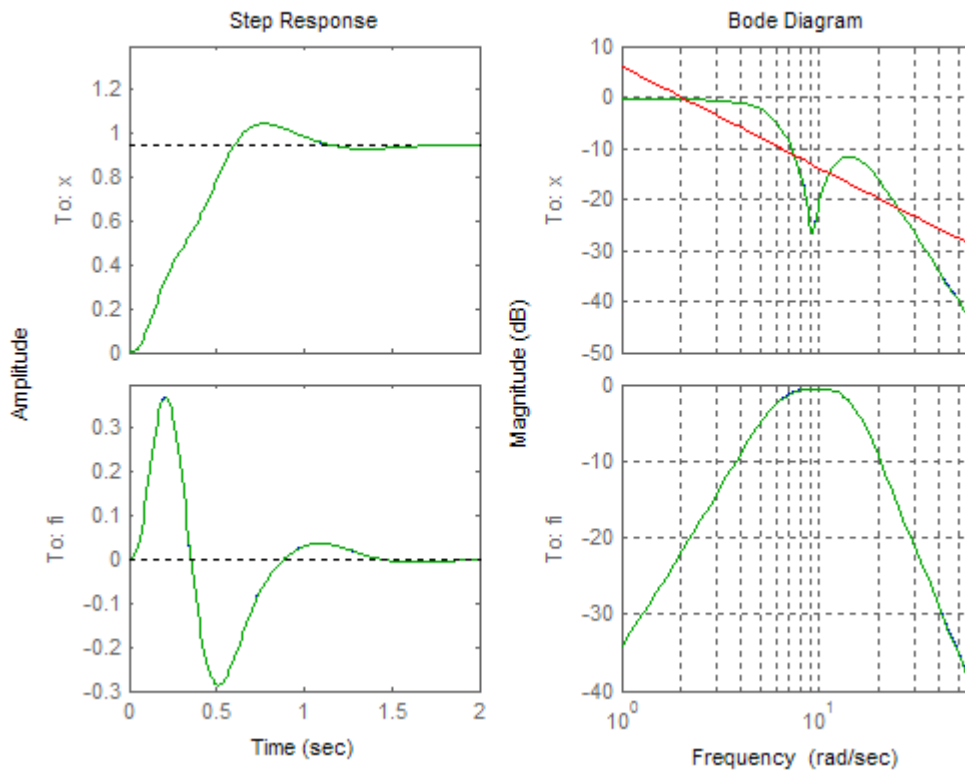
Rysunek 8.4: Schemat uproszczony do syntezy regulatora metodą H_∞

W schemacie tym u_1 , czyli sygnał odniesienia traktowany jest jak zakłócenie; wyjścia y_1 są wyjściami do zminimalizowania; u_2 to wejście do układu (wyjście regulatora); y_2 to wyjścia mierzone (wejścia do regulatora).

Przy założeniu, że obiekt G jest podany w postaci przeskalowanej, wybór wag jest uproszczony i sprowadza się do ograniczenia pasma przenoszenia układu zamkniętego przez wybór wagi W_1 , oraz ograniczeniu wzmocnień regulatora przez wagę W_2 :

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{0.01s + 2}{s + 0.2} \\ W_2 &= 1 \\ W_3 &= [] \end{aligned} \quad (8.4)$$

Taki dobór wag daje zadowalające (na pierwszy rzut oka) wyniki (zrealizowane w skrypcie `syn_hinf.m`):



Rysunek 8.5: Symulacja zachowania się obiektu przy zastosowaniu regulatora H_∞ opartego o wagi 8.4

Jednak bliższe badanie otrzymanego regulatora wskazuje na to, że nie daje on sprzężenia od kąta wychylenia wahadła:

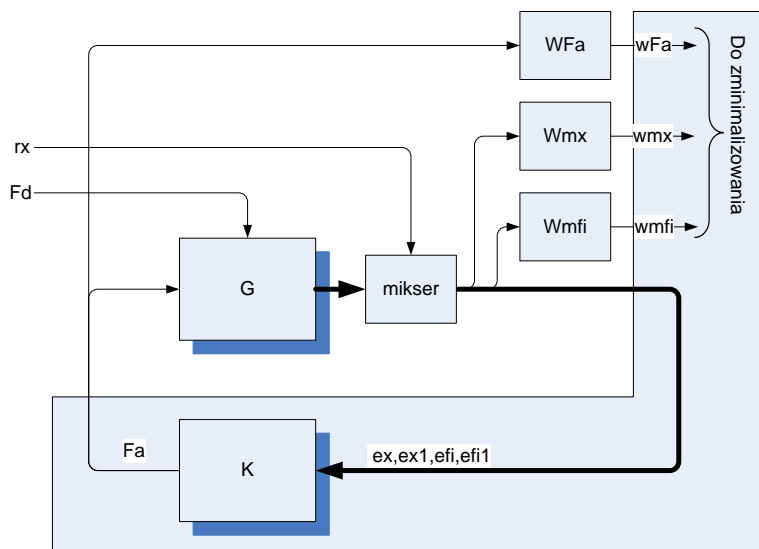
```
norm(Kh(1,1))= 0.25854 % wzmocnienie od pozycji wózka
norm(Kh(1,3))= 3.9833e-007 % wzmocnienie od wychylenia wahadła
```

Takie zachowanie się regulatora nie jest sprzeczne z logiką: układ jest asymptotycznie stabilny, a zatem aby zapewnić asymptotyczną odpowiedź układu wystarczy odfiltrować częstotści rezonansowe układu. Podejście to nie pozwala na eliminację zakłóceń, okaże się też zupełnie nieskuteczne w wypadku, gdyby częstotć własna wahadła się zmieniła. Aby temu zapobiec, należy dodać wejście zakłóceń do schematu syntezy regulatora.

8.3.2. Podejście z wejściem zakłóceń do obiektu - regulator H_∞

„zaawansowany”

Użyto następującego schematu podłączenia wag sygnałów do syntezy regulatora:



Rysunek 8.6: Schemat syntezy regulatora H_∞ z uwzględnieniem wejścia zakłóceń; rx – wejście zadające pozycję wózka; w_{Fa} , w_{mx} , w_{mfi} – wagi sygnałów do zminimalizowania

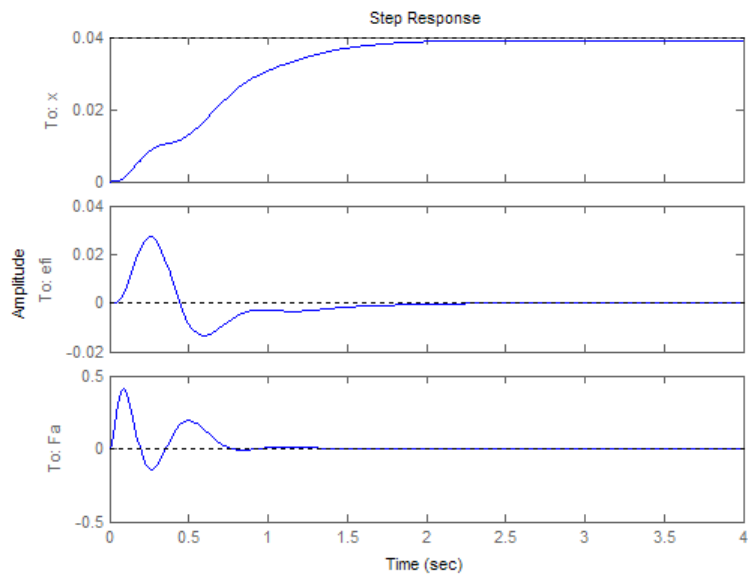
W schemacie tym F_d , rx - to sygnały zewnętrzne, nie kontrolowalne; F_a – sygnał kontrolowalny; w_{Fa} , w_{mx} , w_{mfi} – odpowiednio transmitancje i sygnały wagowe, które regulator ma zminimalizować; $ex, ex1, efi, efi1$ – sygnały uchybu, mierzone w układzie. Wagi dobrano wprost z analizy sterowalności. Zapewniają one bliskie aperiodycznemu tłumienie drgań wahadła, krótki czas ustalania pozycji wózka, oraz zachowanie parametrów eksploatacyjnych silnika:

```
Wmx=tf([1/200 1],[1/9 0.01]);

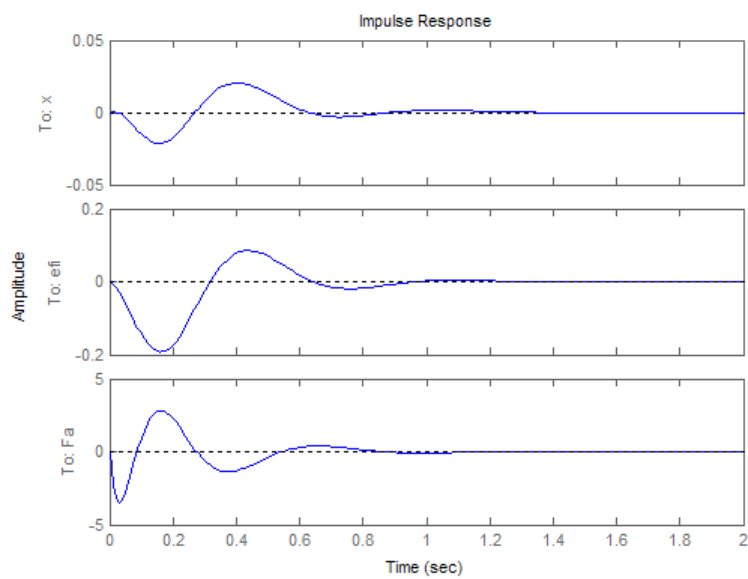
Wmfi=tf([1/3 1],[1/300 1]);

Wact=tf([1/9 1],[1/200 1]);
```

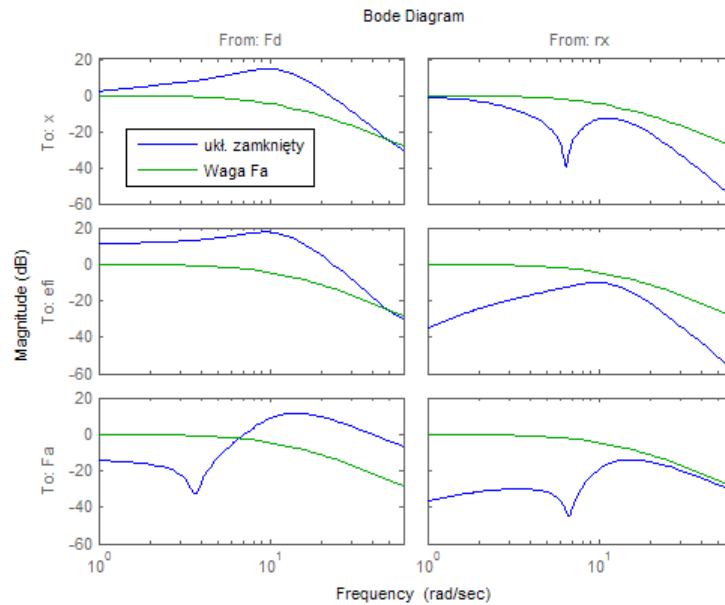
Uzyskano następujące wyniki:



Rysunek 8.7: Odpowiedź układu zamkniętego na wymuszenie skokowe przesunięcia wózka



Rysunek 8.8: Odpowiedź układu zamkniętego na zakłócenie impulsowe



Rysunek 8.9: Odpowiedzi częstotliwościowe od wejścia zakłóceń F_d i wymuszenia rx .

Należy tutaj podkreślić, że wagi W_{mx} , W_{fi} , W_{act} – wzięto wprost z rozdziału 7, a zatem regulator z góry zachowuje wszystkie ograniczenia tam przewidziane; nie jest potrzebne dodatkowe dostrajanie tych wag. Jedyne dostrojenie dotyczyło zwiększenia tłumienia w wahadle – przesunięcie załamania w wadze z $9[\text{rad/s}]$ do $3[\text{rad/s}]$ co wymusiło bardziej aperiodyczną odpowiedź wahadła – zmniejszenie ilości wahań z dwóch do jednego, przy jednoczesnym wydłużeniu się czasu ustalania wózka.

8.4. Porównanie wyników

Aby zapewnić jednolite i powtarzalne warunki porównania efektów działania wybranych regulatorów, których syntezy dokonano w pracy, zastosowano metodę porównania norm macierzowych układów regulacji, na poszczególnych kierunkach.

Uwaga: porównanie wykonano dla przeskalowanych układów. Norma $\|f_i = f(rx)\|_{\infty} = 1$ oznacza „przy pełnym wysterowaniu rx , nastąpi pełne wychylenie wahadła”. patrz: rozdział 5.6.

Norma $\|\bullet\|_\infty$ określa maksymalne wzmocnienie danego toru dla pełnego zakresu częstotliwości, a tym samym związana jest z maksymalną amplitudą sygnału po przejściu przez układ.

Oto porównanie normy $\|\bullet\|_\infty$ dla wybranych kierunków transmisji sygnałów:

Norma $\ \bullet\ _\infty$	od sygnału odniesienia rx: $\ \dots = f(rx)\ _\infty$			od sygn. zakłócenia Fd: $\ \dots = f(Fd)\ _\infty$		
	(1) do x $\ x = f(rx)\ _\infty$	(2) do fi $\ fi = \dots\ _\infty$	(3) do Fa $\ Fa = \dots\ _\infty$	(4) do x $\ x = \dots\ _\infty$	(5) do fi $\ fi = \dots\ _\infty$	(6) Fa $\ Fa = \dots\ _\infty$
PP	1.000	0.523	0.131	6.149	5.016	0.243
LQR	1.000	0.582	0.093	5.975	5.842	0.319
H_∞ - prosty	1.000	0.937	0.090	72.249	20.441	0.073
H_∞ - zaaw.	1.015	0.560	0.270	2.677	5.187	0.700

Tabela 1: Zestawienie norm macierzowych układu zamkniętego od wybranych wejść do wybranych wyjść układu. rx – wejście sygnału odniesienia (problem serwo) ; Fd – wejście sygnału zakłócenia (problem regulacji).

PP – regulator metody przesuwania biegunów.

Ad.1. $\|x = f(rx)\|_\infty$ mówi o przesterowaniu jakie występuje przy zadaniu skoku jednostkowego na wejście rx. Wszystkie regulatory, oprócz H_∞ - „zaawansowanego” zostały zaprojektowane na brak przesterowania.

Ad.2. $\|fi = f(rx)\|_\infty$ mówi o maksymalnym wychyleniu wahadła podczas skoku jednostkowego na wejściu rx.

Ad.3. $\|Fa = f(rx)\|_\infty$ mówi o maksymalnej amplitudzie sygnału sterującego użytego podczas skoku jednostkowego.

Ad.4. $\|x = f(Fd)\|_\infty$ mówi o maksymalnym przesunięciu wózka w przypadku zakłócenia skokiem jednostkowym (wejście Fd – zakłócenie)

Ad.5. $\|fi = f(Fd)\|_\infty$ mówi o maksymalnym wychyleniu wahadła przy zakłóceniu skokiem jednostkowym

Ad.6. $\|Fa = f(Fd)\|_\infty$ mówi o maksymalnej amplitudzie sygnału sterującego, która jest potrzebna do tłumienia wychylenia wahadła przy zakłóceniu skokiem jednostkowym

Wniosek: Regulator H_∞ zaawansowany, sprzężony z układem wykazuje zbliżoną jakość sterowania w trybie serwo, w stosunku do regulatorów PP i LQR. Wyjątek dotyczy jednak jego działania w trybie eliminacji zakłóceń. Przy zakłóceniu skokiem jednostkowym wózek przesunie się na odległość około dwa razy mniejszą niż w przypadku regulatorów LQR i PP. Norma $\|\bullet\|_2$ związana jest z średnim wzmocnieniem danego toru układu dla wszystkich częstotliwości, a tym samym z czasem ustalania się sygnału na wyjściu. Oto porównanie norm $\|\bullet\|_2$ dla takich samych warunków jak poprzednio:

norma $\ \bullet\ _2$	od sygn. odniesienia rx $\ \dots = f(rx)\ _2$			od sygn. zakłócenia Fd $\ \dots = f(Fd)\ _2$		
	(1)do x $\ x = f(rx)\ _2$	(2)do fi $\ fi = \dots\ _2$	(3)do Fa $\ Fa = \dots\ _2$	(4)do x $\ x = \dots\ _2$	(5)do fi $\ fi = \dots\ _2$	(6)do Fa $\ Fa = \dots\ _2$
PP	1.089	1.037	--	7.630	8.998	0.486
LQR	1.232	0.984	--	8.699	8.763	0.627
H_∞ -prosty	1.325	1.720	0.274	6.677	17.089	0.113
H_∞ - zaaw.	1.592	1.323	2.557	4.874	12.060	2.735

Tabela 2: Porównanie norm $\|\bullet\|_2$ dla wybranych torów przejścia sygnałów przez układ zamknięty.

Ad. 1. $\|x = f(rx)\|_2$ mówi o względnym czasie ustalania się pozycji wózka przy wymuszeniu skokiem jednostkowym

Ad. 2. $\|fi = f(rx)\|_2$ to względny czas ustalania się pozycji wahadła przy wymuszeniu skokiem jednostkowym

Ad. 3. $\|Fa = f(rx)\|_2$ Względny koszt sterowania przy wymuszeniu skokiem jednostkowym.

Dla regulatorów PP i LQR nie określa się tej normy (macierzowej), ponieważ w układzie zamkniętym występuje bezpośrednie przejście od sygnału wejściowego – tym samym dla skoku jednostkowego norma ta wynosiłaby nieskończoność.

Ad. 4. $\|x = f(Fd)\|_2$ Względny czas ustalania się pozycji wózka przy zakłóceniu skokiem jednostkowym

Ad. 5. $\|f_i = f(Fd)\|_2$ Względny czas ustalania się pozycji wahadła zakłóceniu skokiem jednostkowym

Ad. 6. $\|Fa = f(Fd)\|_2$ Względny koszt sterowania zakłóceniu skokiem jednostkowym

Należy zauważyć bardzo długi czas ustalania się pozycji wahadła przy regulatorze H_∞ - „prostym”, który jest jednocześnie związany z bardzo małą amplitudą sygnału sterującego. Wynika to z faktu, że model zakłóceń nie był uwzględniony w schemacie syntezy tego regulatora – prowadzi to do regulatora który nie ma wzmocnień od kąta wychylenia wahadła. Regulatory PP i LQR mają lepsze czasy ustalania się sygnału na wyjściu przy jednoczesnym niewielkim koszcie sterowania, co jednak zostało uzyskane w iteracyjnym procesie dostrajania ich wzmocnień.

Rozdział 9: Podsumowanie i wnioski

W pracy zaprojektowano, zbudowano i uruchomiono stanowisko badawcze. Został opracowany i zweryfikowany model matematyczny, nieliniowy (pełny) oraz zlinearyzowany. Parametry modelu zostały wyznaczone na drodze identyfikacji. Na podstawie otrzymanego modelu przeprowadzono pełną analizę sterowalności, a następnie zsyntezowano regulatory metodami:

- przesuwania biegunów
- LQR
- H_∞ - „prosty” oraz „zaawansowany”.

Można zatem stwierdzić, że cele pracy zostały zrealizowane.

Regulator H_∞ został zsyntezowany na podstawie wag określonych podczas analizy sterowalności. Tym samym udowodniono tezę 1 pracy.

Do zrealizowania celów pracy użyto oprogramowania inżynierskiego:

- SolidWorks – projekt mechaniczny
- Mathematica – model matematyczny pełny oraz linearyzacja symboliczna
- MatLab – sprawdzenie modelu matematycznego, linearyzacja numeryczna, identyfikacja parametrów, synteza regulatorów
- LabView – implementacja programów pomiarowo-sterujących stanowiskiem w systemie czasu rzeczywistego ETS, implementacja algorytmów bezpieczeństwa stanowiska (zapewniających zachowanie parametrów eksploatacyjnych)

W szczególności połączenie symbolicznych możliwości programu Mathematica z numerycznymi możliwościami programu Matlab, pozwoliło na efektywne sprawdzanie hipotez. Doskonała dokumentacja programu Matlab była dodatkową pomocą.

Tym samym udowodniono tezę 2 pracy.

Nie udało się zsyntezować regulatora stabilizującego wahadło w pozycji odwróconej. W załączniku B podano analizę wskazującą na niemożliwość zrealizowania takiego regulatora – stanowisko jest nie sterowalne.

Pewnymi trudnościami były problemy z silnikiem oraz wzmacniaczem mocy stanowiska. Ich parametry nominalne podane w dokumentacji nie odpowiadają rzeczywistości. W szczególności zauważono, że wzmacniacz mocy nie zawiera regulatora siły silnika (według dokumentacji zawiera). Ponadto ramka silnika pękła podczas eksperymentów, co poważnie ograniczyło możliwość osiągania wysokich sił w dalszych eksperymentach. Dodatkowym, poważnym problemem jest niższa niż założona jakość łożysk w wózku stanowiska:

- w łożysku liniowym występują luzy – właściwość ta ogranicza dopuszczalne pasmo częstotliwości przenoszonych przez silnik, powoduje powstanie hałasu oraz dodatkowych zakłóceń i różnic w stosunku do zastosowanego modelu
- w łożysku obrotowym lub w enkoderze występuje duże (znacznie większa niż w przewidziana w dokumentacji) tarcie statyczne, a więc nieliniowość dookoła pozycji stabilnych w przypadku wahadła odwróconego. Ta właściwość poważnie zwiększa różnice w zachowaniu się stanowiska w stosunku do jego modelu. Tarcie statyczne jest na tyle duże, że można nawet ustawić „ręcznie” wahadło w pozycji odwróconej i pozostanie ono w takiej pozycji (!)

Dalszymi celami powinna być dalsza szczegółowa analiza modelu i sterowalności stanowiska w konfiguracji z wahadłem odwróconym, w celu znalezienia drogi modyfikacji stanowiska w kierunku polepszenia sterowalności wahadła. Autor proponuje :

- optymalizację masy i długości wahadła w celu znalezienia zakresu sterowalnej kombinacji parametrów stanowiska
- poprawienie jakości łożysk liniowych oraz obrotowych, lub znalezienie dokładnego modelu występujących w nich zjawisk

Załącznik A: Literatura

- [1]: Multivariable feedback Control: Analysis and design; Sigurd Skogestad, Ian Postlethwaite; Wiley-Interscience; 2 edycja (18 Grudzień 2005)
- [2] Analiza i synteza wielowymiarowych układów sterowania, Tadeusz Sawik, Skrypty uczelniane Nr 968;
- [3] Linear Robust Control, Michael Green, David J.N. Limebeer, Pearson Education, Inc. ISBN 0-13-102278-4
- [4] LQR LQG Notes, Joao P. Hespanha, Electrical and Control Engineering Department, University of California
- [5] Embedded Systems Programming, Dan Simon "From Here to Infinity" lipiec 2000, str. 2-8;
- [6] Non-Linear Swing-Up and Stabilizing Control of an Inverted Pendulum System. Marvin Bugeja, Faculty of Engineering University of Malta, 2003.
- [7] J. Kowal • Kowal J. Podstawy automatyki. Tom I i II. Uczelniane Wydawnictwa Naukowe – Dydaktyczne Akademii Górniczo – Hutniczej w Krakowie, 2004
- [8] Control System Design, Goodwin, Graebe, Salgado, Prentice Hall 2001, ISBN 0-13-958653-9

Załącznik B: Analiza sterowalności obiektu

Wstępna analiza obserwowalności i kontrolowalności

Aby sprawdzić obserwowalność układu w sensie Kalmana [3] buduje się macierz obserwowalności Δ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

gdzie n – rząd macierzy A ; Układ jest całkowicie obserwowalny, jeśli rząd macierzy Δ jest równy n . [2]

Aby sprawdzić sterowalność układu w sensie wprowadzonym przez Kalmana[3], buduje się macierz sterowalności Γ :

$$\Gamma = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \quad (9.2)$$

Przy założeniu nieograniczonego wektora sterowania U , układ jest całkowicie sterowalny, jeśli rząd macierzy Γ jest równy n . [2]

Zlinearyzowany model stanowiska jak w 5.13 jest sterowalny i obserwowalny wg. założeń 5.15 i 5.16;

Założenie nieograniczonego wektora sterowania jest bardzo istotne w praktyce. Może okazać się, że układ sterowalny według tezy wzoru 5.16 jest praktycznie niesterowalny gdyż wymaga nierealizowalnej amplitudy (energii) lub pasma sygnału sterującego.[1]

Pełna analiza kontrolowalności

Poniższą analizę przeprowadzono wg. procedury podanej w [1], przy założeniu że parametry stanowiska są znane (patrz: rozdział 6).

Skalowanie obiektu

Skalowania obiektu dokonano w rozdziale rozdział 5.6

Sprawdzenie minimalności realizacji obiektu

Sprawdzenia dokonano przy pomocy skryptu `make_linmod.m` w Matlabie.

Sprawdzenie sterowalności funkcjonalnej

Sterowalność funkcjonalna oznacza możliwość kontrolowania każdego z wyjść obiektu niezależnie. Aby było to możliwe, wymagane jest

- aby obiekt miał co najmniej tyle samo wejść ile wyjść
- aby rząd obiektu był równy liczbie wyjść

Analizowane stanowisko ma więcej wyjść (x, f_i) niż wejść (F_a); zatem nie jest możliwe sterowanie tych wyjść niezależnie.

Sprawdzenie biegunów obiektu

Transmitancje do wyjść dane są równaniami:

$$x: \frac{-13.7524 (s+6.543) (s-6.426)}{s (s+6.869) (s-6.198) (s+2.129)}$$

$$f_i: \frac{-0.94001 (s+34.5)}{(s+6.869) (s-6.198) (s+2.129)}$$

Obiekt ma bieguny w prawej części płaszczyzny Gaussa w $p=6.198$ [rad/s]. Oznacza to, że potrzebne jest sterowanie o paśmie przenoszenia co najmniej 13[rad/s] (3Hz);

Sprawdzenie zer obiektu

Na podstawie danych w punkcie 4, obiekt ma zero w prawej części płaszczyzny Gaussa w $z=6.426$ [rad/s]. Gdyby wymagane było sterowanie tym wyjściem w zakresie niskich częstotliwości, pasmo przenoszenia regulatora powinno być mniejsze niż 3[rad/s] (0.4Hz); jest to jednocześnie górne ograniczenie na sygnał zadający pozycję wózka w stanowisku¹.

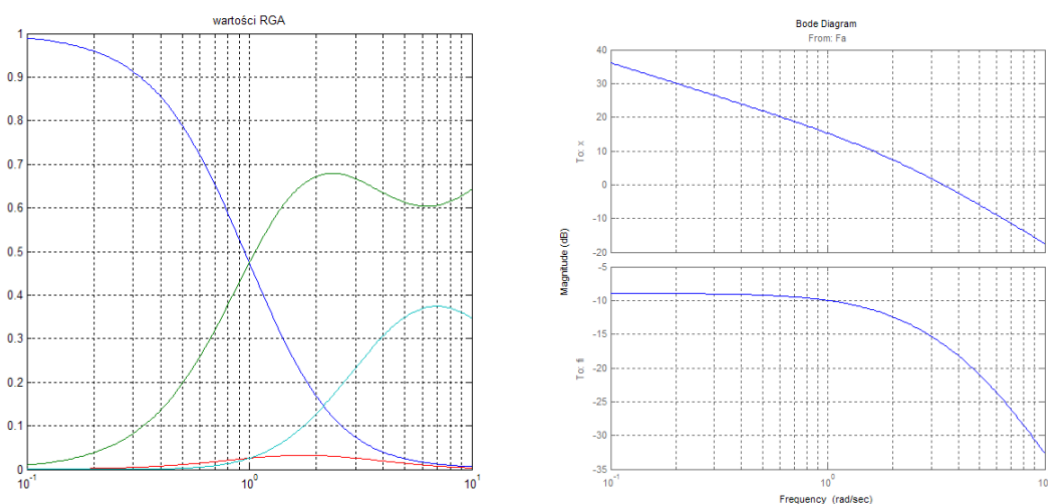
Sterowanie pozycją wózka w zakresie wysokich częstotliwości jest możliwe od częstotliwości 13[rad/s] (3Hz)

Ponieważ wymagane jest sterowanie wózka w zakresie niskich częstotliwości, pasmo przenoszenia regulatora powinno być mniejsze niż 3[rad/s].

Wniosek: Powyższe wymaganie jest sprzeczne z wymaganiem z punktu B.2.4

Sprawdzenie odpowiedzi częstotliwościowej $G(j\omega)$ i obliczenie macierzy RGA

Wartości macierzy RGA (Relative Gain Array) w funkcji częstotliwości wyliczane są przy pomocy skryptu `make_linmod.m`:

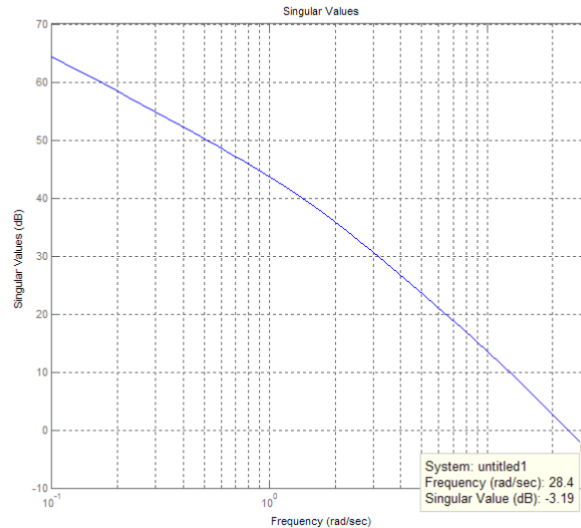


Rysunek 9.1: porównanie wartości macierzy RGA i odpowiedzi częstotliwościowej

¹ [1] str. 236

wniosek: Dla częstotliwości krytycznej $\sim 3,5\text{rad/s}$, żadna z wartości macierzy RGA nie wzrasta powyżej 1.

Wykreślenie wartości osobliwych obiektu



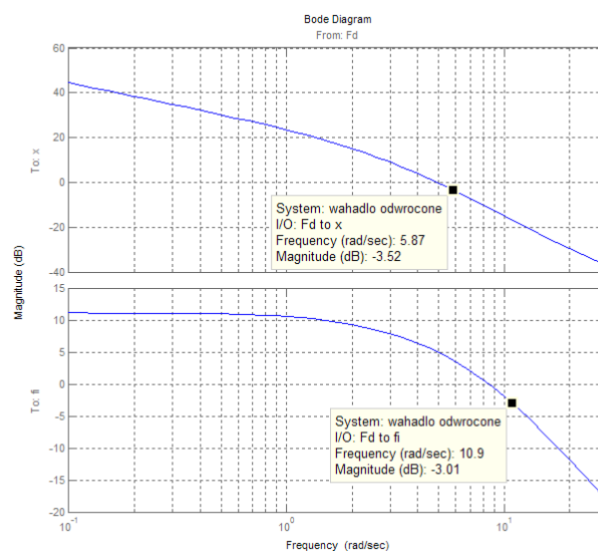
Rysunek 9.2: Wartości osobliwe obiektu

Analiza wartości osobliwych obiektu

Wartości osobliwe obiektu spadają poniżej 1 dla częstości $\sim 22[\text{rad/s}]$. Wniosek: wyjścia obiektu są kontrolowalne do częstości około 5Hz. (powyżej tych częstości wejścia mają mały wpływ na wyjścia)

Sterowalność ze względu na zakłócenia

Regulacja jest niezbędna dla wszystkich częstości, dla których $|Gd(j\omega)| > 1$:



a zatem potrzebny jest regulator dający pasmo przenoszenia co najmniej do $10[\text{rad/s}]$ (1,6Hz).

Ponadto regulator ten powinien dać $S < 1/\|gd\|_2$, gdzie $S = (1 + GK)^{-1}$, $\|gd\|_2$ - norma 2 z sygnału zakłócenia; sprawdzenie tego warunku jest jednak możliwe dopiero po zsyntezowaniu regulatora K.

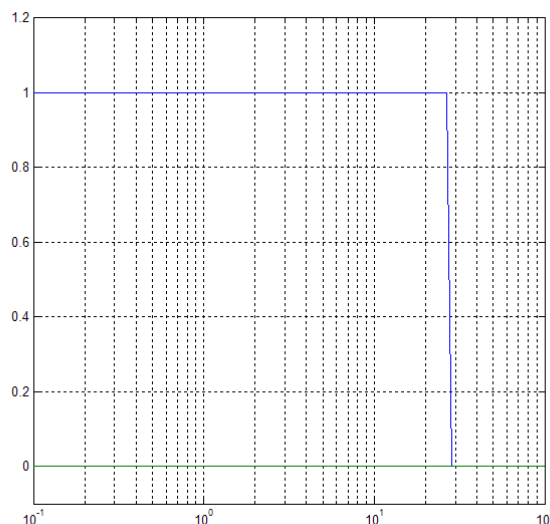
Sterowalność ze względu na nasycenie wejść przy istnieniu zakłócenia

Aby zapewnić możliwość kompensacji sygnału zakłócającego sygnałem sterowania, przy założeniu nie dochodzenia wejść sterujących do nasycenia, dla obiektów MIMO stosuje się przybliżony warunek [1, str. 246]: dla każdej częstości

$$\sigma_i(G) \geq |u_i^H g_d|^{-1}, \text{ dla częstości gdzie } |u_i^H g_d| > 1 \quad (9.3)$$

gdzie $\sigma_i(G)$ - i-ta wartość osobliwa G przy danej częstości; u_i^H - kierunek działania wejścia i; transmitancja od zakłócenia na ten kierunek; Macierz kierunków działania to wektor U uzyskany z rozkładu macierzy na wartości osobliwe: $A = U\Sigma V^H$

Sprawdzenia tego warunku dokonano przy pomocy skryptu test_ctrl02b.m



Rysunek 9.3: Spełnienie warunku (6.3) 1- warunek spełniony; 0 – warunek nie spełniony.

Wniosek: Pierwsza część warunku jest spełniona dla częstości do ~ 25 [rad/s]; druga dla wszystkich częstości; można zatem spodziewać się nasycenia wejścia do obiektu dla zakłóceń o częstości większych niż 25[rad/s].

Interpretacja fizyczna: wyższa częstość zakłócenia o tej samej amplitudzie oznacza większą energię włożoną w destabilizację wahadła (np. uderzenie w wahadło). Powyżej pewnej granicy energii nie jest możliwe ponowne wystabilizowanie wahadła przy założonej mocy silnika.

Wzmocnienie zakłóceń przez zera transmitancji zakłócenia

Aby zapewnić Kontrolowalność ze względu na zakłócenia przy występowaniu zera po prawej stronie płaszczyzny Gaussa w transmitancji od zakłócenia, dany jest warunek

$$|G(z)| < 1 \quad (9.4)$$

lub odpowiednio dla systemów MIMO

$$|y_z^H g_d(z)| < 1 \quad (9.5)$$

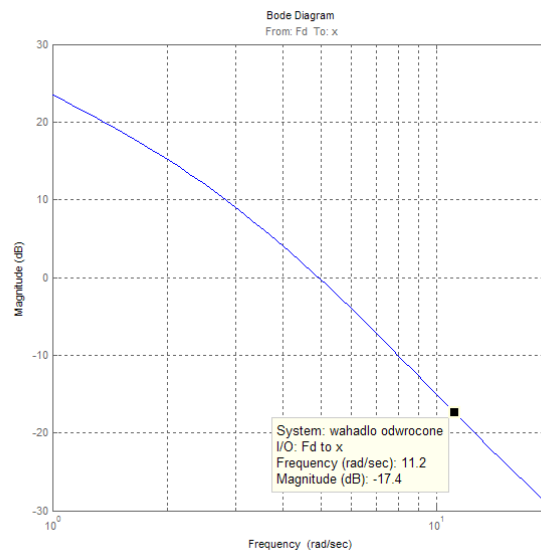
Jedyne zero w transmitancji od zakłóceń pojawia się w wyjściu do x:

Zero/pole/gain from input "Fd" to output "x":

10.9195 (s+11.96) (s-11.57)

s (s+6.869) (s-6.198) (s+2.129)

z=11.572



Rysunek 9.4: Moduł transmitancji od Fd do x w otoczeniu częstości $z=11.57[\text{rad/s}]$

Wniosek: zero w transmitancji od zakłócenia nie ma znaczącego wpływu na nasycanie wejść obiektu, ponieważ $|G(z)| \approx 0.134$

Niepewności modelu

Wartości macierzy RGA są miarą bliskości macierzy A układu do macierzy osobliwej. (element (i,j) macierzy RGA wskazuje o ile trzeba zmienić odpowiedni element macierzy A aby uzyskać macierz osobliwą) Wartości te wykreślono na rys. 6.1. Ponieważ jedna z wartości układu jest duża (blisko 1) dla niskich częstotliwości (<0.5 [rad/s]) a inna dla wysokich (>6 [rad/s]), można wnioskować, że układ jest wrażliwy na niepewność modelu. Układ jest najmniej wrażliwy dookoła częstości 1rad/s.

Podsumowanie

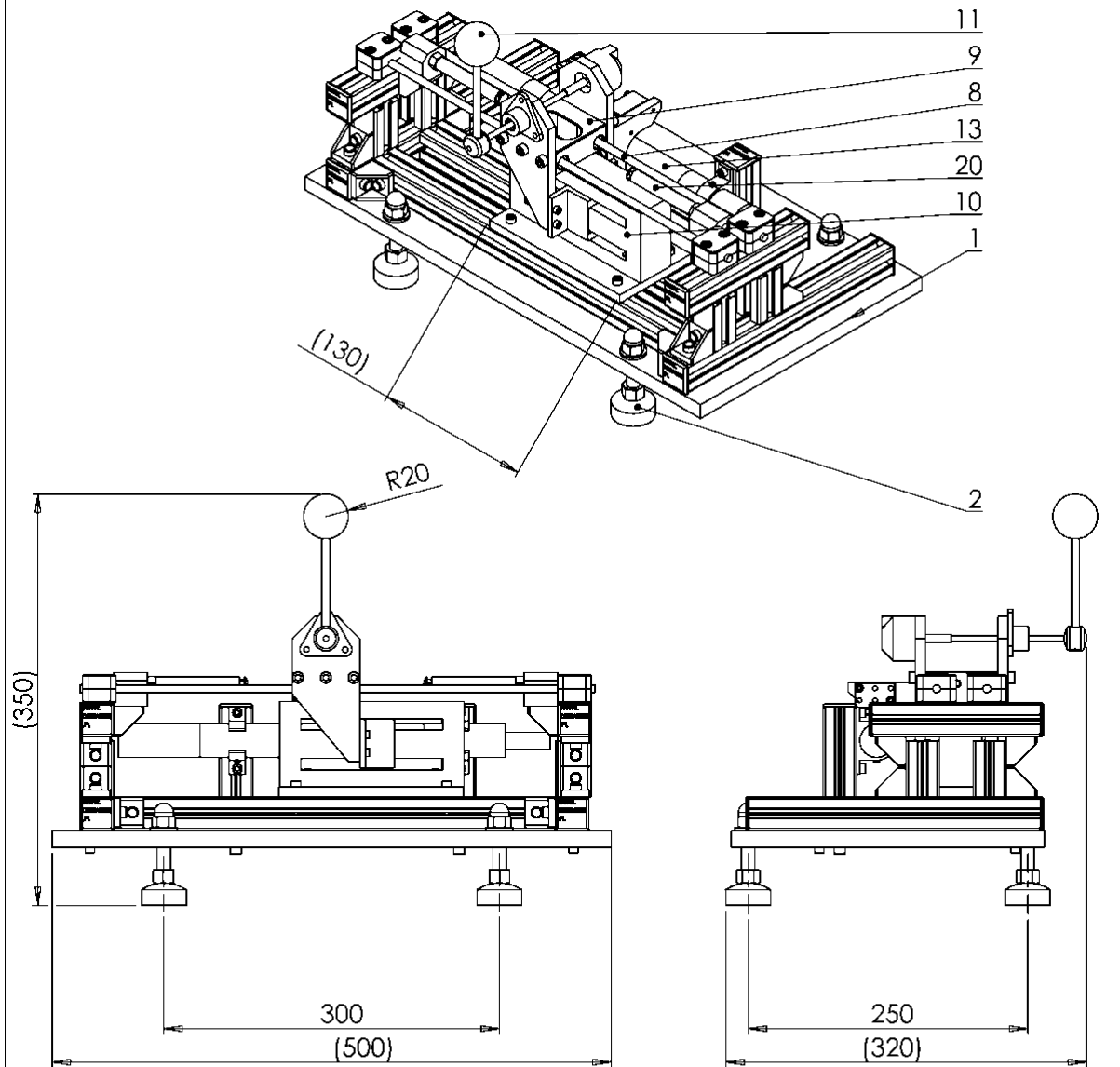
Powyższa analiza wskazuje na występowanie sprzecznych wymagań. W punkcie B.2.4 wymaga się aby pasmo przenoszenia regulatora było szersze niż 13[rad/s]; jednocześnie w punkcie B.2.5 wymaga się aby pasmo regulatora było węższe niż 3[rad/s]; Nie da się spełnić tych warunków jednocześnie, ponieważ do dyspozycji jest tylko jedno wejście do układu (nie ma możliwości zastosowania regulatorów odprzegających).

Występują dodatkowe ograniczenia ze względu na czułość układu na zakłócenia o wysokiej częstotliwości.

Wniosek: Obiekt jest niesterowalny.

Załącznik C: Dokumentacja mechaniczna stanowiska

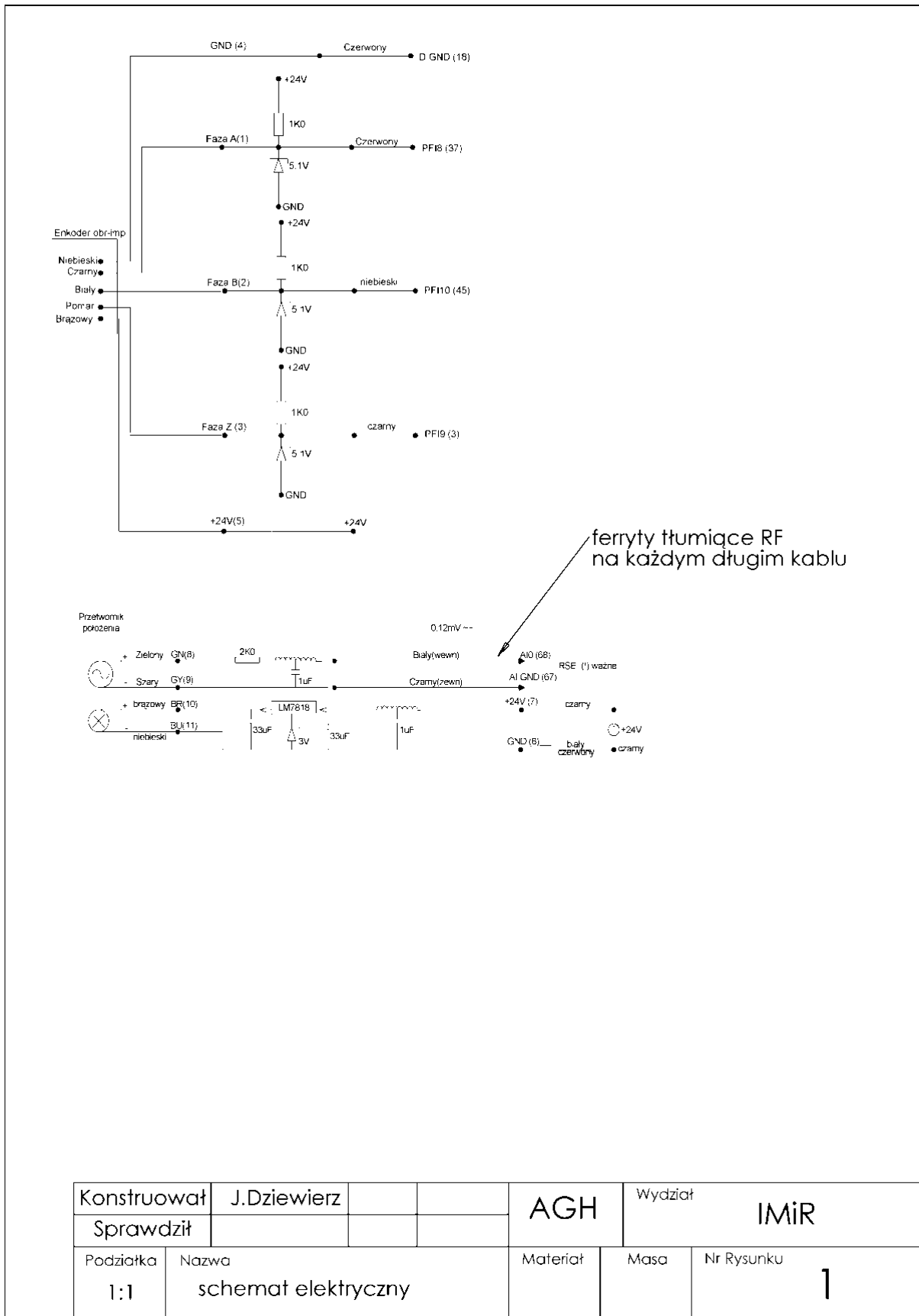
uwaga: pełna dokumentacja 3D znajduje się na dołączonej płycie CD.



NR ELEMENTU	NUMER CZĘŚCI	ILOŚĆ
1	płyta podstawa	1
2	nóżka	4
8	szyna	1
9	wózek	1
10	zespół silnika	1
11	wachadło	1
13	przetwornik położenia	1
20	ogranicznik	2

Konstruował	J.Dziewierz			AGH	Wydział	IMiR
Sprawdził						
Podziałka	Nazwa			Materiał	Masa	Nr Rysunku
1:5	Arkusze 0					0

Załącznik D: Dokumentacja elektryczna stanowiska



Załącznik E: Dokumentacja oprogramowania do stanowiska i do syntezy regulatorów

E.1. Matlab

- make_linmod3.m

Skrypt ten posłużył do badania sterowalności stanowiska oraz syntezy regulatorów.

```

%% Główny skrypt
%% -- Skrypt zmieniający ustawienia figur
%f1=figure(1); set(gcf,'Color',[1 1 1]);
%f2=figure(2); set(gcf,'Color',[1 1 1]);
%f3=figure(3); set(gcf,'Color',[1 1 1]);
%% R6 Parametry badanego stanowiska
Mc=0.567; Mp=0.143; Ip=0.002*1e-6; L=0.117; b=2.000; c=0.001;
%% R5.4 Załadowanie modelu stanowiska
dp3l=linmod('dp_to_lin2'); %% linearyzacja modelu z Simulinka
dp3=ss(dp3l.a,dp3l.b,dp3l.c,dp3l.d);
dp3.OutputName={'x','x1','fi','fi1'};
dp3.InputName={'Fa','Fd'};
dp1=dp_synth(Mc,Mp,b,c,L,Ip); %% model zlinearyzowany analitycznie
dpla=dp1(:,1); % obiekt bez wejścia zakłucenia
dp3a=dp3(:,1);
%% R5 Porównanie między biegunami dwóch modeli
damp(dp1);
damp(dp3);
% note that they may not be in the same order
%% R7 controlability and observability
%% R7.2 General observability matrix
obs=[dp1.c' dp1.a'*dp1.c' (dp1.a')^2*dp1.c' (dp1.a')^3*dp1.c'];
disp(sprintf('Observability matrix rank=%2.0f', rank(obs)));
%% R7.2 General controlability matrix
ctrl=[dp1.b dp1.a*dp1.b dp1.a^2*dp1.b dp1.a^3*dp1.b];
disp(sprintf('Controlability matrix rank=%2.0f', rank(ctrl)));
%% R7.3.2 minimal state realization check
order_dp1=order(dp1);
order_dp1_minimal=order(ss(tf(dp1),'min'));
if order_dp1==order_dp1_minimal
    disp('dp1 jest minimalną realizacją');
else
    disp('dp1 nie jest minimalną realizacją');
end
%% R4.3.1 pkt1. plant scaling
ymax=diag([0.04 1 0.2 1]);
umax=diag([15 1]);
rmax=0.04;
%dps=inv(ymax)*dp1*umax; dps.InputName=dp1.InputName;
dps.OutputName=dp1.OutputName;
dps_tmp=series(umax,dp1);
dps=series(dps_tmp,inv(ymax));
dps.InputName=dp1.InputName; dps.OutputName=dp1.OutputName;
dpsa=dps(:,1);
%% R7.3.4 pkt. 4,5 - bieguny i zera
zpk(dp1);
%% R7.3.6 pkt.6 - RGA
G=pck(dpla.A,dpla.B,dpla.C,dpla.D);
omega=logspace(-1,1.8,200);
Gw=frsp(G,omega);

```

```

RGAw=veval('.*',Gw,vpinv(vtp(Gw)));
RGAlength=length(omega);
RGAw1=RGAw(1:RGAlength*4,1);
RGAw2=reshape(RGAw1,4,RGAlength);
%figure(1); semilogx(omega,abs(RGAw2)); grid on; title('wartości RGA');
%figure(2); bodemag(dps([1 3],1),logspace(-1,1.8,200)); grid('on');

%% R7.3.7 pkt7,8 sigma
%figure(3); sigma(dps([1 3],1),{0.1 60}); grid on % tylko od Fa i do x,fi
%% R7.3.9 pkt. 9 kontrolowalność od zakłuceń
%bodemag(dps([1 3],2),'b',dps([1 3],1),'g',{0.1 30}); grid on
%legend('od zakłócenia','od silnika');
%% R7.3.10 pkt. 10 - zrobiony w pliku test_ctrl02b.m
disp('patrz plik test_ctrl02b.m');
%% R7.3.11 pkt 11 RHP-zero od zakłuceń
rhpztest=zpk(dps(1,2))
disp(sprintf('z=%2.3f',rhpztest.z{1}(2))) %%
% uwaga(!) W tym przypadku zera są błędnie wyliczone (błędy numeryczne -
% problem wyliczania zer z postaci ss do zpk jest numerycznie źle
% uwarunkowany.
%% R8.1 Synteza Pole Placement
pp=pole(dp1);
pp1=pp;
pp_r1=-8.78463;
pp_i1=1.96146;
pp_r2=-9.21452;
pp_i2=2.15367;
pp1(1)=pp_r1+pp_i1*i; pp1(2)=pp_r1-pp_i1*i;
pp1(3)=pp_r2+pp_i2*i; pp1(4)=pp_r2-pp_i2*i;
% pp1=pp; pp1([3 4])=pp1([3 4])-3;
Kpp=place(dp1(:,1).a,dp1(:,1).b,pp1);
pcl=feedback(series(Kpp,dp1(:,1)),diag(ones(4,1)));
damp(pcl)
%disp(Kp);
%figure(6);
Kpp_do_wpisania=Kpp;
Kpp_do_wpisania([3 4])=Kpp_do_wpisania([3 4])*pi/180;
Kpp_do_wpisania
%step(pcl([1 3],1),0:0.01:3);
Kppa=ss(inv(umax(1,1))*Kpp*ymax); Kppa.InputName={'ex','ex1','efi','efil'};
Kppa.OutputName={'Fa'};
mikser_a=diag(-ones(4,1));
mikser_a=[mikser_a [1 0 0 0]];
mikser=ss(mikser_a); mikser.InputName={'x','x1','fi','fil','rx'};
mikser.OutputName={'ex','ex1','efi','efil'};
pp_cl_full=connect(mikser,Kppa,dps,{'rx','Fd'},{'x','fi','Fa'});
%figure(2);step(pp_cl_full);
%figure(3);bodemag(pp_cl_full,{0.1 30}); grid on
show_norms(pp_cl_full)

%% R8.2 Regulator LQR
ymax=diag([0.04 1 0.17 1]);
Q=inv(ymax.^2);
R=inv(1.4^2);
Klqr=lqr(dp1(:,1),Q,R);
Klqr_do_wpisania=Klqr;Klqr_do_wpisania([3 4])=Klqr_do_wpisania([3
4])*pi/180;
kz=Klqr_do_wpisania;
disp(sprintf('[Kx Kx1 Kfi Kfil]=[%2.3f %2.3f %2.3f %2.3f
]',kz(1),kz(2),kz(3),kz(4)));
Klqr=ss(Klqr,'InputName',{'ex','ex1','efi','efil'},'OutputName','Fa');

```

```

lqr_cl=feedback(series(Klqr,dp1(:,1)),diag(ones(4,1)));
lqr_cl_f=feedback(Klqr,dp1(:,1));
S = stepinfo(lqr_cl([1 3],1)*0.03);
damp(lqr_cl_f)
disp(sprintf('settime=%2.3f',S(1).SettlingTime));
%figure(1); clf;
%subplot(2,1,1); step(lqr_cl_f*0.04,0:0.01:2);
%subplot(2,1,2); step(lqr_cl([1 3],1),0:0.01:2);
Klqr_s=inv(umax(1,1))*Klqr*ymax; Klqr_s.InputName=Klqr.InputName;
Klqr_s.OutputName=Klqr.OutputName;
lqr_cl_full=connect(mikser,Klqr_s,dps,{'rx','Fd'},{'x','fi','Fa'});
show_norms(lqr_cl_full)
%% R8.3.1 Regulator Hinf "prosty" (augw)
clc
clear w1
clear w2
clear w3
dpsa.a(1,1)=-0.01;
freq1=0.2;
freq2=200;
W1=ss([1 0 0 0; 0 0 1 0])*10*tf([1/freq2 1],[1/freq1 1]);
W2=1;
%bodemag(W1,{0.1 120}); ylim([-40 50]);grid on
W3=[];
P=augw(dpsa,W1,W2,W3); %%(!)
[Kh,CLh,GAMg,INFOg] = hinfsyn(P);
Kh=reduce(Kh,5);
hCL1=feedback(series(Kh,dpsa),diag(ones(4,1)));
hCL1.Name='dp+Hinf'; CL21.Name='dp+H2';
%figure(1);
%subplot(1,2,1);
%step(hCL1([1 3],1),0:0.01:2) %% prawie dobrze;
%figure(2);
%subplot(1,2,2);
%bodemag(hCL1([1 3],1),W1(1,1),{1 60}); grid on
%bodemag(hCL1([1 3],1),CL21([1 3],1),W1(1,1),{1 60}); grid on
% K regulator - hp - hinf prosty
Khp=ss(Kh);
set(Khp,'InputName',{'ex','ex1','efi','efil'},'OutputName','Fa');
hp_cl_full=connect(mikser,Khp,dps,{'rx','Fd'},{'x','fi','Fa'});
show_norms(hp_cl_full);
%% R8.3.2 Hinf zaawansowany (connect)
clc
mikser=-ss([
    -1  0  0  0  1
     0  0 -1  0  0
    -1  0  0  0  1
     0 -1  0  0  0
     0  0 -1  0  0
     0  0  0 -1  0]);
mikser.InputName={'x','x1','fi','fil','rx'};
mikser.OutputName={'mx','mfi','ex','ex1','efi','efil'};

Wfd=0.01*tf([1/200 1],[1/0.5 1]);
%Wfd=tf(0);
Wfd.InputName='wFd'; Wfd.OutputName='Fd';

Wmx=tf([1/200 1],[1/9 0.01]);
Wmx.InputName='mx'; Wmx.OutputName='wmx';

Wmfi=tf([1/3 1],[1/300 1]);

```

```
Wmfi.InputName='mfi';Wmfi.OutputName='wmfi';

Wact=1*tf([1/9 1],[1/200 1]);
Wact.InputName='Fa'; Wact.OutputName='wFa';

P=connect(dps,mikser,Wact,Wmx,Wmfi,Wfd,{'rx','wFd','Fa'},{'wmx','wmfi','wFa',
'','ex','ex1','efi','efi1'}); %(!)
P.InputGroup.Udist=[1 2];
P.InputGroup.Uctrl=[3];
P.OutputGroup.Yw=[1 2 3];
P.OutputGroup.Ymeas=[4 5 6 7];
[KhZ,CLh,GAMh,INFOh]=hinfosyn(P);
KhZ=reduce(KhZ,4);
KhZ.InputName={'ex','ex1','efi','efi1'}; KhZ.OutputName='Fa';
PCLh=connect(dps,mikser,KhZ,{'Fd','rx'},{'x','efi','Fa'});
%figure(1);clf; step(PCLh(:,2),0:0.01:4);
%figure(2);clf; bodemag(PCLh(:,2),{1 60});
%figure(3);clf; bodemag(PCLh,ss(ones(3,2))*1/Wact,{1 60})
dKhZ=c2d(KhZ,0.01);
disp(sprintf('biegun o najw.wart.
rzeczywistej:%2.3f',max(real(pole(Kh)))));

% badanie norm
hp_cl_full=connect(mikser,KhZ,dps,{'rx','Fd'},{'x','fi','Fa'});
show_norms(hp_cl_full)
```

- ip_synth.m

Skrypt realizujący zlinearyzowany model stanowiska utworzony przy pomocy programu

Mathematica, w postaci obiektu LTI w Matlabie.

```
% IP_SYNTH linearized inverted pendulum model
%   Synthesizes linearized inverted pendulum model using supplied
parameters
%   usage:
%   ip=ip_synth(Mc,Mp,b,c,L,I)
%   where:
%   Mc - Cart_Mass
%   Mp - Pendulum_Mass
%   b - Cart-track Friction coefficient
%   c - Pendulum_Friction coefficient
%   L - Pendulum_COG_Distance,
%   I - Pendulum_Moment of inertia
%   ip - LTI model
% Author - Jerzy Dziewierz, 2007, matlab:www.dziewierz.pl
% see web www.dziewierz.pl
function wo=ip_synth(Mc,Mp,b,c,L,I)
g=9.81; % gravity acceleration
v1=(Mc+Mp)/(I*(Mc+Mp)+L*L*Mc*Mp); % model equations
v2=(I+L*L*Mp)/(I*(Mc+Mp)+L*Mp*Mc);
A=[0,1,0,0;
    0,-b*v2,(-L*Mp)^2*g*v2/(I+L*L*Mp),(L*Mp*c*v2)/(I+L*L*Mp);
    0,0,0,1;
    0,(L*Mp*b*v1)/(Mc+Mp),L*Mp*g*v1,-c*v1];
B1=[0; v2; 0; (-L*Mp*v1)/(Mc+Mp)]; % cart force input
B2=[0; 0; 0; -L/I]; % disturbance input
B=[B2 B1];
C=eye(4);
D=zeros(4,2);
```

```
wo=ss(A,B,C,D,'inputname',{'D','F'},'name','ip bugeja','outputname',{'x'  
'x1' 'fi' 'fi1'});  
wo.statename(1)={'x'};  
wo.statename(2)={'x1'};  
wo.statename(3)={'fi'};  
wo.statename(4)={'fi1'};
```

- **dp_synth.m**

Podobnie jak ip_synth.m, skrypt realizuje model wahadła w pozycji „w dół” do postaci obiektu LTI w Matlabie.

```
% DP_SYNTH linearized cart-pendulum model  
% Synthesizes linearized cart-pendulum model using supplied parameters  
% usage:  
% ip=dp_synth(Mc,Mp,b,c,L,I)  
% where:  
% Mc - Cart_Mass  
% Mp - Pendulum_Mass  
% b - Cart-track Friction coefficient  
% c - Pendulum_Friction coefficient  
% L - Pendulum_COG_Distance,  
% I - Pendulum Moment of inertia  
% ip - LTI model  
% Author - Jerzy Dziewierz, 2007, matlab:www.dziewierz.pl  
% see web www.dziewierz.pl  
function dp=dp_synth(Mc,Mp,b,c,L,Ip)  
g=9.81; % gravity acceleration  
v1=L*L*Mc*Mp + Ip*(Mc + Mp);  
afi2_Fa=L*Mp;  
afi2_Fd=-L*Mc;  
afi2_fi=-(Mc+Mp)*g*L*Mp;  
afi2_fi1=-(Mc+Mp)*c;  
afi2_x1=-b*L*Mp;  
  
ax2_Fa=(Ip+L*L*Mp);  
ax2_Fd=Ip;  
ax2_fi=-L*L*Mp*Mp*g;  
ax2_fi1=L*Mp*c;  
ax2_x1=-b*(Ip+L*L*Mp);  
A=[0 1 0 0;  
  0 ax2_x1/v1 ax2_fi/v1 ax2_fi1/v1;  
  0 0 0 1;  
  0 afi2_x1/v1 afi2_fi/v1 afi2_fi1/v1;  
  ];  
B=[0 0;  
  ax2_Fa/v1 ax2_Fd/v1;  
  0 0;  
  afi2_Fa/v1 afi2_Fd/v1;  
  ];  
C=eye(4);  
D=zeros(4,2);  
dp=ss(A,B,C,D,'inputname',{'Fa','Fd'},'name','dp Dziewierz  
analityczny','outputname',{'x' 'x1' 'fi' 'fi1'});  
dp.statename(1)={'x'};  
dp.statename(2)={'x1'};  
dp.statename(3)={'fi'};  
dp.statename(4)={'fi1'};
```



```
%Cform(List(Derivative(2)(fi)(t) ==
%      -((-L*Mp*Fa(t) + L*Mc*Fd(t) +
%          (Mc + Mp)*(g*L*Mp*fi(t) +
%          c*Derivative(1)(fi)(t) +
%          b*L*Mp*Derivative(1)(x)(t)))/
%          (Power(L,2)*Mc*Mp + Ip*(Mc + Mp)))
%,
%      Derivative(2)(x)(t) ==
%          ((Ip + Power(L,2)*Mp)*Fa(t) + Ip*Fd(t) +
%          L*Mp*(-(g*L*Mp*fi(t) +
%          c*Derivative(1)(fi)(t) -
%          b*(Ip + Power(L,2)*Mp)*Derivative(1)(x)(t)))/
%          (Power(L,2)*Mc*Mp + Ip*(Mc + Mp))))
```

- analizuj_odp_lqr.m

Skrypt użyty do utworzenia rysunków w rozdziale 8.2

```
%analiza wyników
t=[0:0.01:3];
load i2.txt;
i=i2; clear i1;
t=i(:,1)*1e-6; x=i(:,2); x1=i(:,3); fi=i(:,4); fi1=i(:,5); zad=i(:,6);
braking=i(:,7); F=i(:,8);
Kp=[49.059      18.286      0.31879  -0.00048526];
clear i;
%save dane t fi fi1 x x1 F braking
% note that t[s] x[m] x1[m/s] fi[deg] fi1[deg/s] F[N] braking[1/0]
% przeliczenie stopni na radiany i obrót o 180st.
fi=fi+180;
fi=fi*pi/180;
fi1=fi1*pi/180;
fi=-fi;
fi1=-fi1;
x=x-mean(x);

%%
tstart=1500; tstop=1640;
t2=t(tstart:tstop);
t2=t2-t2(1);
x2=x(tstart:tstop);
fi2=fi(tstart:tstop);
zad2=zad(tstart:tstop);
frez=F(tstart:tstop);
x2=x2-x2(1); zad2=zad2-zad2(1); fi2=fi2-fi2(1);
xs=lsim(pcl([1 3],1),zad2,t2);
figure(3);
subplot(4,1,1); pl=plot(t2,zad2); grid on; ylim([-0.01 0.07]);
xlabel('czas[s]'); ylabel('sygnał referencji[m]'); title('porównanie
wyników symulacji ze zmierzona odpowiedzią układu');
set(pl,'LineWidth',3)
subplot(4,1,2); pl=plot(t2,-frez); grid on; xlabel('czas[s]');
ylabel('Siła[N]');
set(pl,'LineWidth',3,'Color','g')

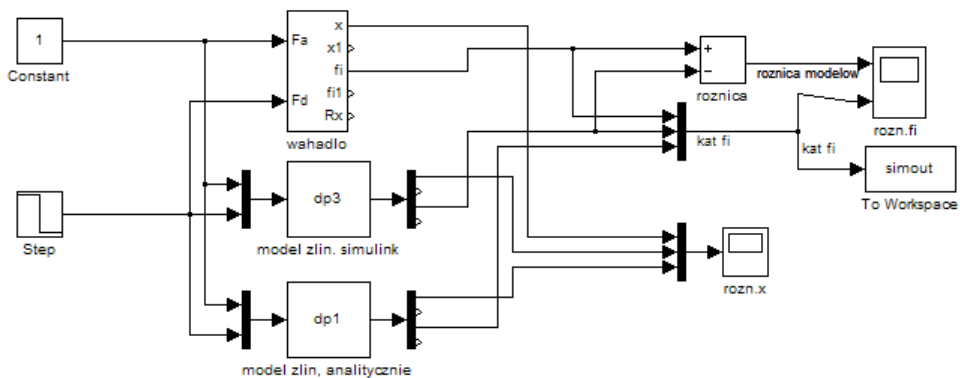
subplot(4,1,3); pl=plot(t2,-x2,t2,xs(:,1)); grid on; xlabel('czas[s]');
ylabel('położenie wózka[m]'); ylim([-0.01 0.07]);
set(pl,'LineWidth',3)
```

```
subplot(4,1,4); pl=plot(t2,fi2,t2,xs(:,2)); grid on; xlabel('czas[s]');
ylabel('odchylenie wahadła[rad]'); ylim([-0.07 0.07]);
set(pl, 'LineWidth', 3)
legend('symulacja', 'pomiar')
```

E.2. Simulink

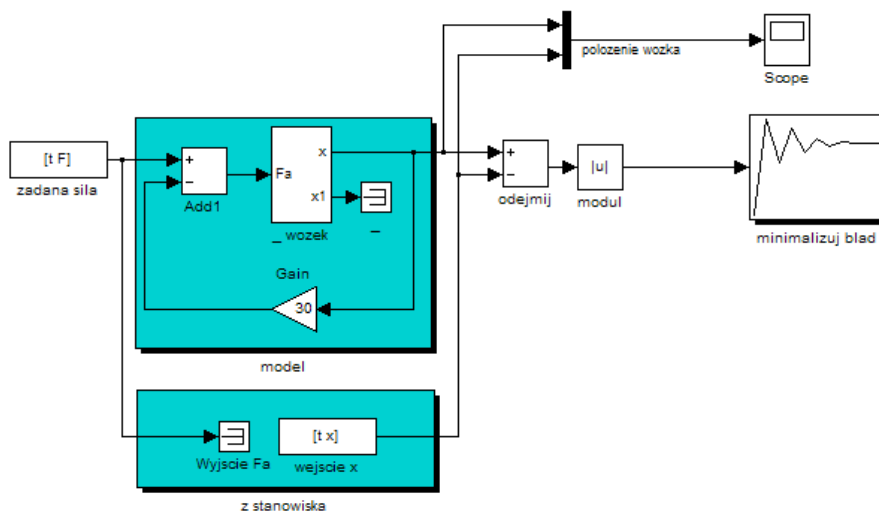
- ip_comparison.mdl

Program porównujący odpowiedzi modeli: pełnego nieliniowego, zlinearyzowanego symbolicznie, i zlinearyzowanego numerycznie. (rozdział 5.5)



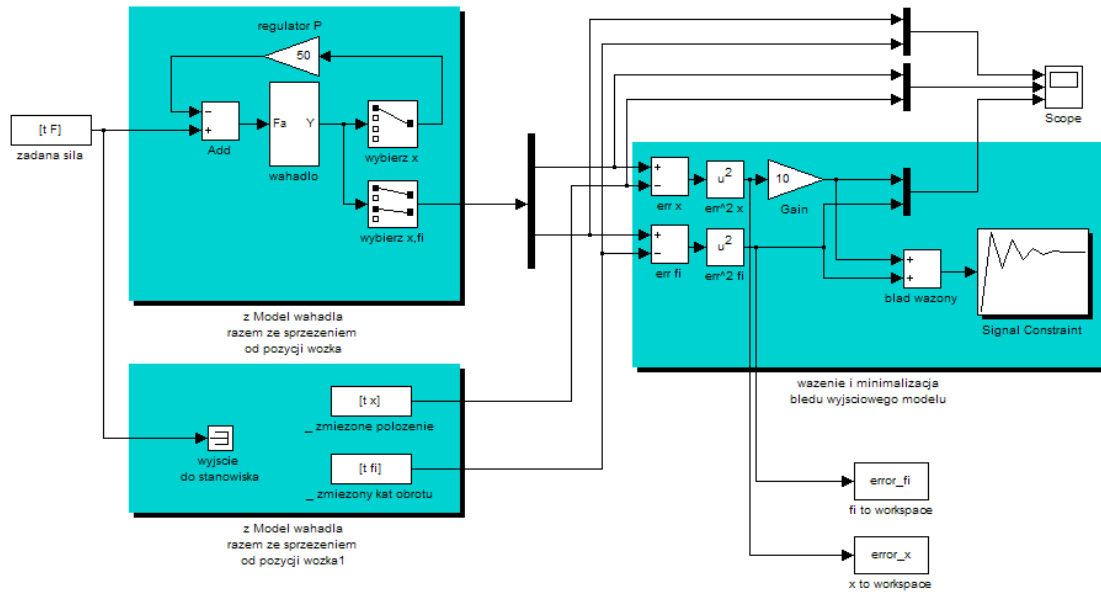
- ip_ident_sam_wozek.mdl

Program do obliczeń w eksperymencie 1 i 2 (rozdział 6.2)



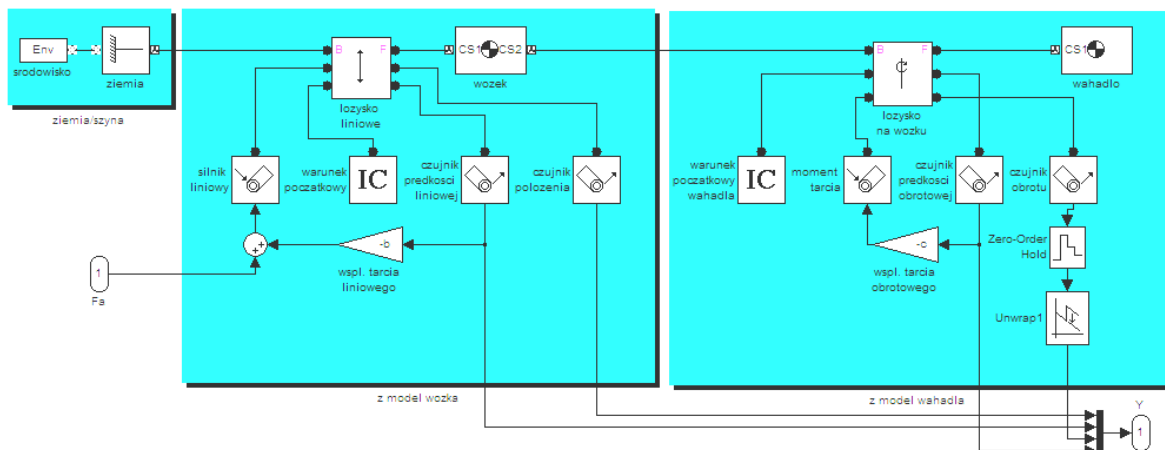
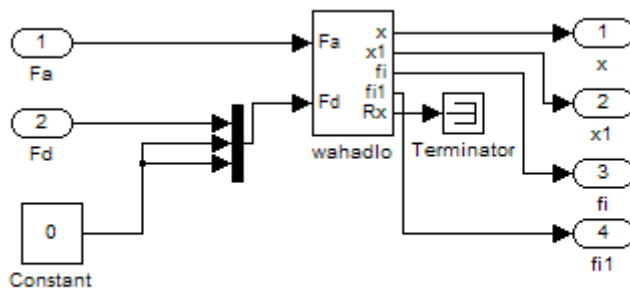
- wahadlo_ident.mdl

program wykonujący obliczenia do eksperymentu 3 (rozdział 6.4)



- dp_to_lin.mdl

Pełny model wahadła użyty do linearyzacji numerycznej

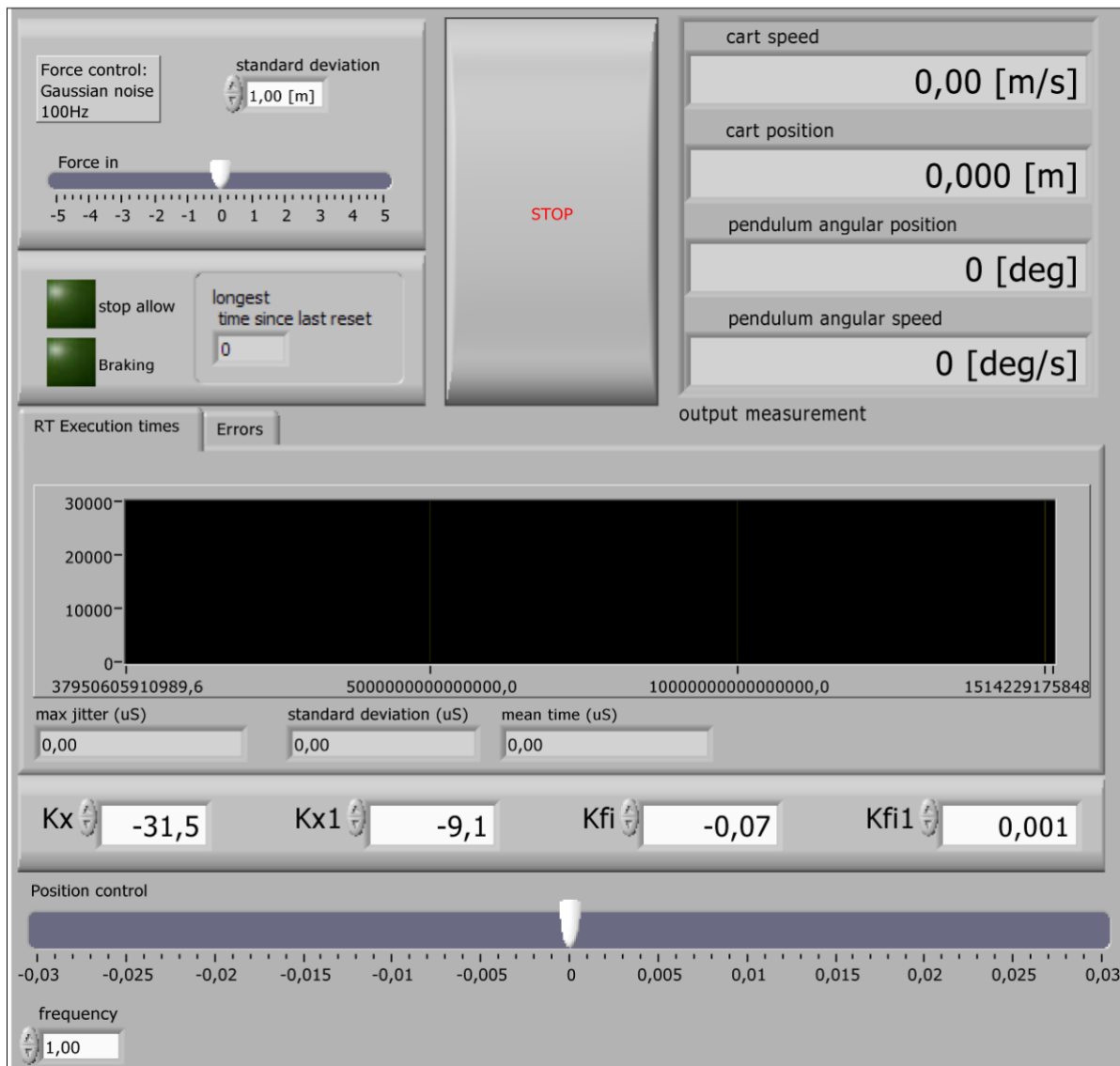


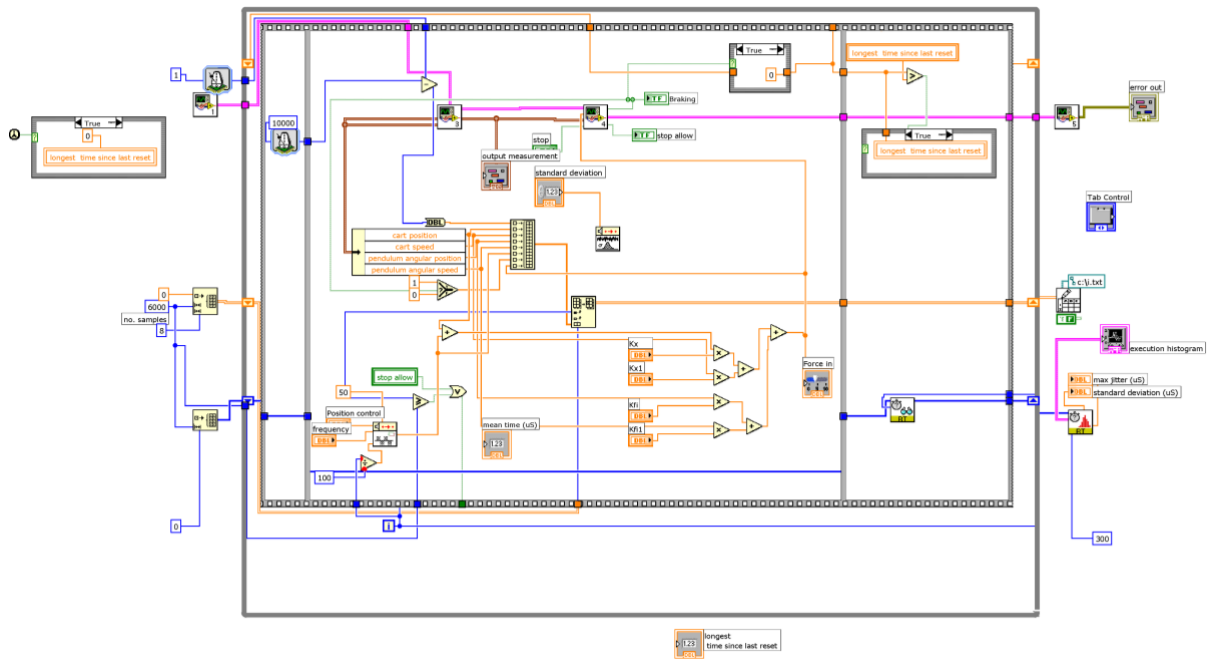
E.3. LabView

- dp_ctrl02.vi

Program najwyższego poziomu, służący do zbierania danych do identyfikacji (dane zapisywane w pliku c:\i.txt) oraz sterowania w czasie rzeczywistym stanowiskiem.

Umożliwia podanie na wyjście sygnału sterującego silnikiem szumu o rozkładzie Gaussa, lub na regulację pozycji/tłumienie drgań wahadła przez sprzężenia od zmiennych stanu. Podaje aktualne zmienne stanu. Zawiera moduł pomiaru czasów wykonania programu czasu rzeczywistego – po zatrzymaniu się programu wyświetla histogram.

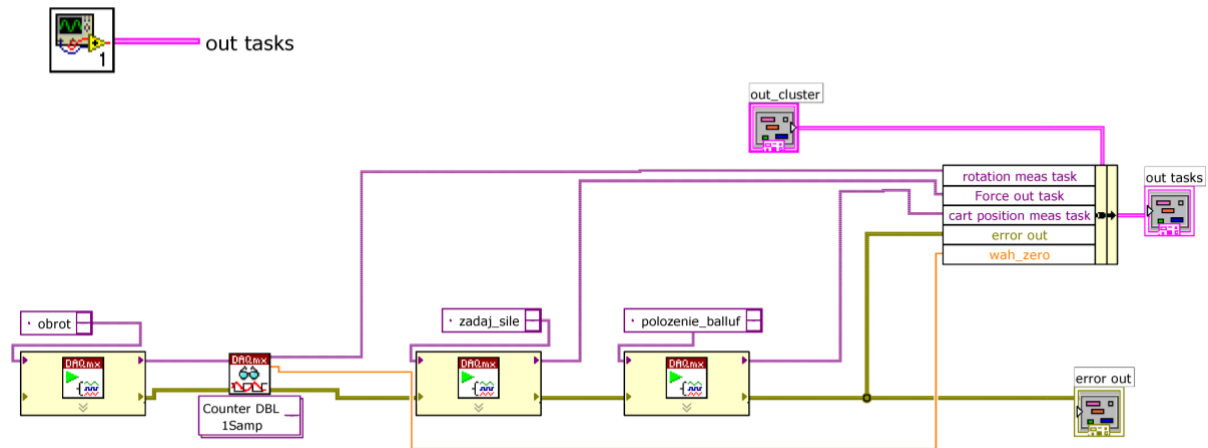




- meas_start.vi

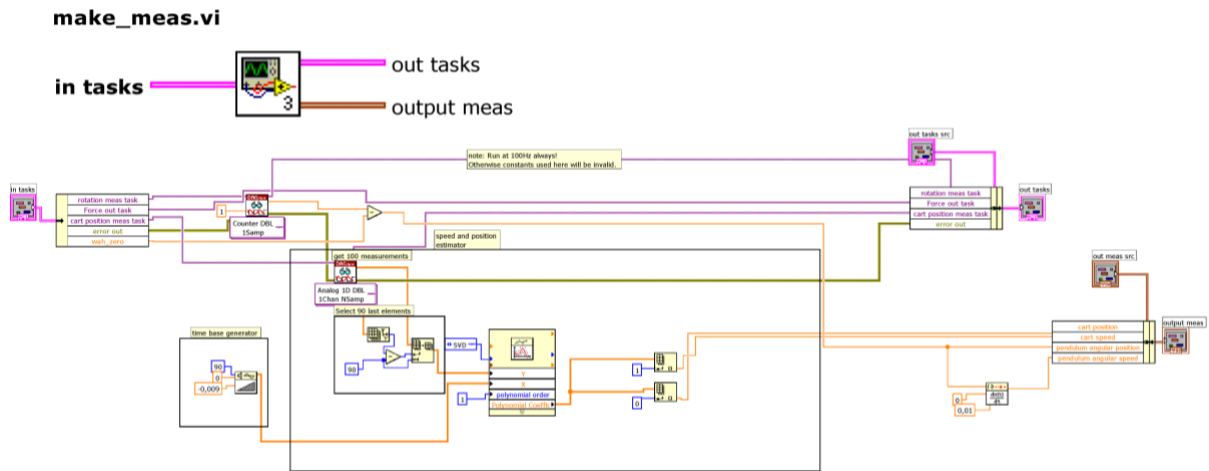
Program w pakiecie Ip_utils, służący do inicjalizacji karty pomiarowej. Przykład użycia znajduje się w programie dp_ctrl02.vi. Uruchamiać tylko raz na symulację, a wyjście out_tasks podłączać poprzez make_meas, make_outputs, do meas_end.

meas_start.vi



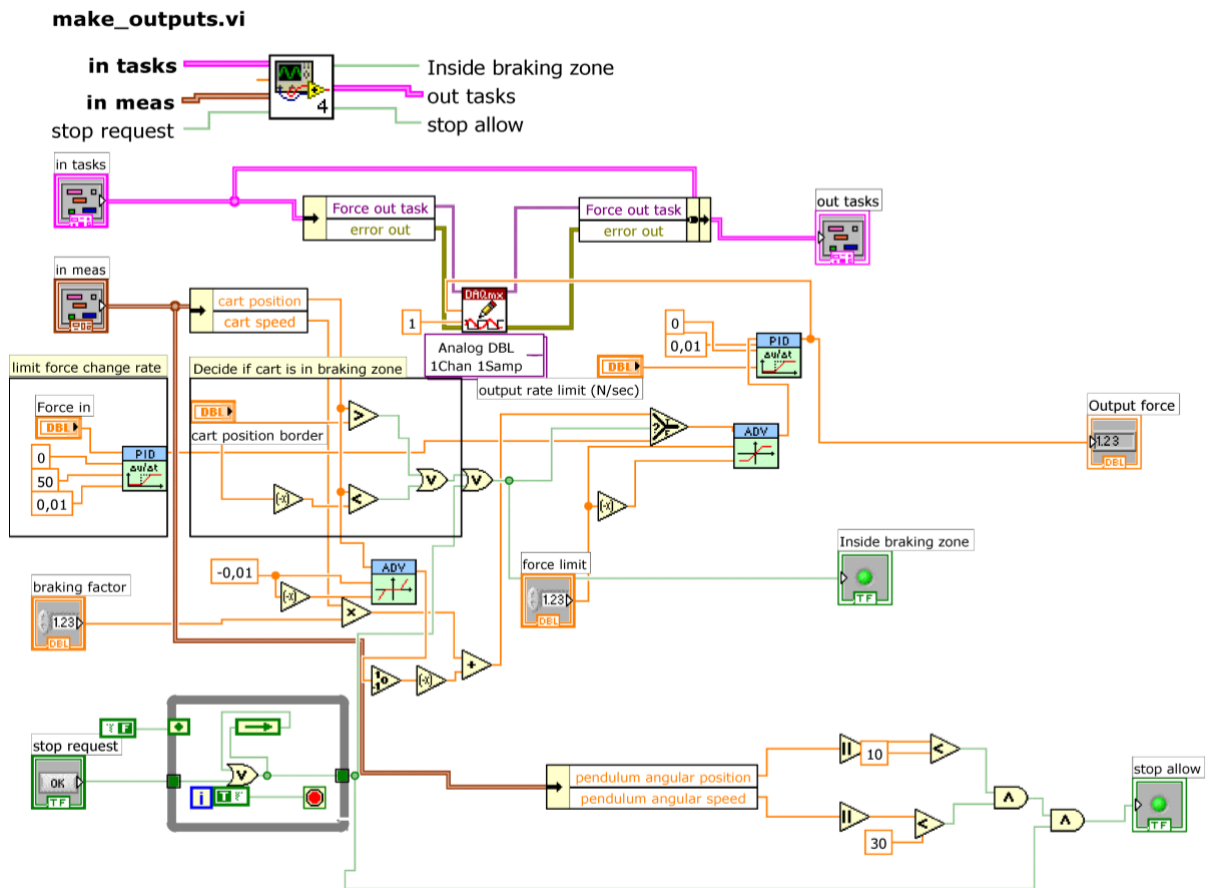
- make_meas.vi

Program wykonujący pojedynczy krok pomiarowy (zczytywanie wejść) oraz wyznaczenie pochodnych wejść poprzez wpasowanie prostych o równaniu $y=ax+b$ do pomiarów wykonanych przy częst. 10kHz. Przykład użycia w dp_ctrl02.vi. Wykonywać w pętli przy próbkowaniu 100Hz.



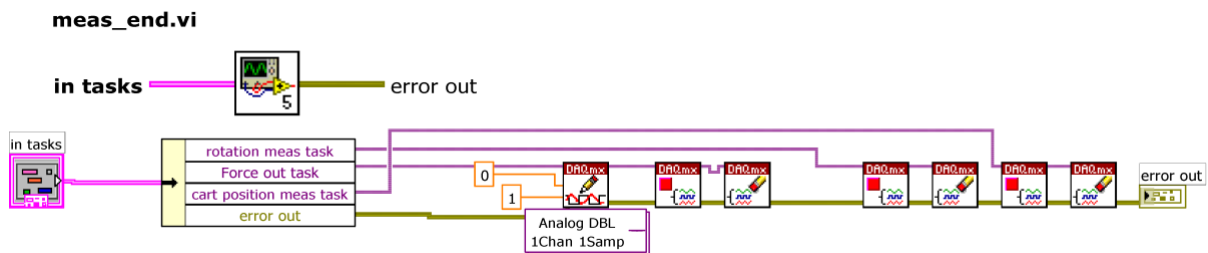
- **make_outputs.vi**

Program dokonujący sprawdzenia warunków eksploatacji stanowiska (prędkość zmiany siły na silniku, limit siły, hamowanie wózka w przypadku wjechania w strefę hamowania; obsługa sygnału zatrzymania stanowiska) oraz wyprowadzenia sygnału zadanej siły przez kartę pomiarową. Na sygnał żądania zatrzymania stanowiska, hamuje wózek, czeka aż wahadło ustabilizuje się w pozycji dolnej, i podaje sygnał zezwolenia na zatrzymanie biegu programu na wyjście. Przykład użycia w `dp_ctrl02.vi`



- meas_end.vi

Program zeruje siłę podawaną na silnik, a następnie zatrzymuje zadania karty pomiarowej. Zawsze stosować na końcu programu. Przykład użycia w dp_ctrl02.vi



E.4. Mathematica

Program Wolfram Mathematica został użyty do stworzenia pełnego modelu stanowiska, wstępnej analizy oraz do linearyzacji symbolicznej. Oto wydruk:

```
EqP = {Fy[t] - Mp * g == Mp * D[D[L * Cos[fi[t]], t], t],
      Fx[t] + Fd[t] == Mp * D[D[x[t] + L * Sin[fi[t]], t], t],
      Ip * D[D[fi[t], t], t] + c * D[fi[t], t] ==
      Fy[t] * L * Sin[fi[t]] - Fx[t] * L * Cos[fi[t]],
      Fa[t] - Fx[t] == Mc * D[D[x[t], t], t] + b * D[x[t], t]};
EqS = Solve[EqP, {Fy[t], Fx[t], x''[t], fi''[t]};
subs = {Ip -> 0.0026, L -> 0.2, g -> 9.81, Mc -> 0.5, Mp -> 0.2, c -> 0.001, b -> 1.5};
EmEq = {Emech[t] == 0.5 * (Mp + Mc) * x'[t]^2 +
      0.5 * Ip * fi'[t]^2 + 0.5 * Mp * (L * fi'[t])^2 + Mp * g * L * Cos[fi[t] ]};
EqD = {EqS[[1, 2, 1]] == EqS[[1, 2, 2]], EqS[[1, 4, 1]] == EqS[[1, 4, 2]]};
TraditionalForm[EqD];
```

EqS /. subs

```
{fi''(t) =
  -(sec^2(fi(t)) (-2 Mp^2 sin(2 fi(t)) fi'(t)^2 L^4 - Mp^2 sin(4 fi(t)) fi'(t)^2 L^4 - 6 Mp cos(fi(t)) Fa(t) L^3 - 2 Mp cos(3 fi(t)) Fa(t)
    L^3 + 6 Mc cos(fi(t)) Fd(t) L^3 + 2 Mc cos(3 fi(t)) Fd(t) L^3 + 2 g Mp^2 sin(fi(t)) L^3 + 2 g Mc Mp sin(fi(t)) L^3 +
    2 g Mp^2 sin(3 fi(t)) L^3 + 2 g Mc Mp sin(3 fi(t)) L^3 + 6 b Mp cos(fi(t)) x'(t) L^3 + 2 b Mp cos(3 fi(t)) x'(t) L^3 -
    4 c Mc fi'(t) L^2 - 4 c Mp fi'(t) L^2 - 4 c Mc cos(2 fi(t)) fi'(t) L^2 - 4 c Mp cos(2 fi(t)) fi'(t) L^2)) /
  (4 L^2 (-Mp^2 L^2 - 2 Mc Mp L^2 + Mp^2 cos(2 fi(t)) L^2 - 2 Ip Mc - 2 Ip Mp)),
  x'(t) = (-2 Mp^2 sin(fi(t)) fi'(t)^2 L^3 - 2 Mp Fa(t) L^2 - Mp Fd(t) L^2 + Mp cos(2 fi(t)) Fd(t) L^2 + g Mp^2 sin(2 fi(t)) L^2 +
    2 b Mp x'(t) L^2 - 2 Ip Mp sin(fi(t)) fi'(t)^2 L - 2 c Mp cos(fi(t)) fi'(t) L - 2 Ip Fa(t) - 2 Ip Fd(t) + 2 b Ip x'(t)) /
  (Mp^2 L^2 + 2 Mc Mp L^2 - Mp^2 cos(2 fi(t)) L^2 + 2 Ip Mc + 2 Ip Mp)}
```

tk = 4;

```
soll = NDSolve[{EqD /. subs /. {Fd[t] -> 0, Fa[t] -> 0}, fi[0] == 0.4 Pi,
  fi'[0] == 0, x[0] == 0, x'[0] == 0, EmEq /. subs}, {fi, x, Emech}, {t, 0, tk}]
```

NDSolve::iprd::d: Some of the functions have real differential order on the equations will be solved as a system of differential algebraic equations. More...

```
{fi -> InterpolatingFunction[{{0., 4.}}, <>],
  x -> InterpolatingFunction[{{0., 4.}}, <>],
  Emech -> InterpolatingFunction[{{0., 4.}}, <>]}
```



```
EqDLTS = {fi''[t] == Normal[Series[EqD[[1, 2]], {fi[t], 0, 1}, {fi'[t], 0, 1}]],
  x''[t] == Normal[Series[EqD[[2, 2]], {fi[t], 0, 1}, {fi'[t], 0, 1}]]}
Simplify[EqDLTS /. subs]
```

$$\{fi''[t] == \frac{2 L Mp Fa[t]}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} - \frac{2 L Mc Fd[t]}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} +$$

$$\left\{ -\frac{2 g L Mc Mp}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} - \frac{2 g L Mp^2}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} \right\} fi[t] +$$

$$\left\{ \frac{2 c Mc}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} + \frac{2 c Mp}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} \right\} fi'[t] -$$

$$\frac{2 b L Mp x'[t]}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp}$$

$$x''[t] == -\frac{2 g L^2 Mp^2 fi[t]}{2 Ip Mc + 2 Ip Mp + 2 L^2 Mc Mp} + \frac{2 c L Mp fi'[t]}{2 Ip Mc + 2 Ip Mp + 2 L^2 Mc Mp} +$$

$$\frac{(2 Ip Fa[t] + 2 L Mp Fa[t] + 2 Ip Fd[t] - 2 b Ip x'[t] - 2 b L Mp x'[t]) /}{(2 Ip Mc + 2 Ip Mp + 2 L^2 Mc Mp)}$$

$$\{fi''[t] == -4.16667 Fa[t] + 10.41667 Fd[t] + 28.6125 fi[t] - 0.0729167 fi'[t] + 6.25 x'[t],$$

$$x''[t] == 1.66667 Fa[t] + 0.833333 Fd[t] - 1.635 fi[t] + 0.00416667 fi'[t] - 2.5 x'[t]\}$$

```
EqDL2TS = {fi''[t] ==
  Normal[Series[EqD[[1, 2]] /. {fi[t] -> fi[t] - pi}, {fi[t], 0, 1}, {fi'[t], 0, 1}]],
  x''[t] == Normal[Series[EqD[[2, 2]], {fi[t], 0, 1}, {fi'[t], 0, 1}]]}
Simplify[EqDL2TS /. subs]
```

$$\{fi''[t] == -\frac{2 L Mp Fa[t]}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} + \frac{2 L Mc Fd[t]}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} +$$

$$\left\{ \frac{2 g L Mc Mp}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} + \frac{2 g L Mp^2}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} \right\} fi[t] +$$

$$\left\{ \frac{2 c Mc}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} + \frac{2 c Mp}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} \right\} fi'[t] +$$

$$\frac{2 b L Mp x'[t]}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp}$$

$$x''[t] == -\frac{2 g L^2 Mp^2 fi[t]}{2 Ip Mc + 2 Ip Mp + 2 L^2 Mc Mp} + \frac{2 c L Mp fi'[t]}{2 Ip Mc + 2 Ip Mp + 2 L^2 Mc Mp} +$$

$$\frac{(2 Ip Fa[t] + 2 L Mp Fa[t] + 2 Ip Fd[t] - 2 b Ip x'[t] - 2 b L Mp x'[t]) /}{(2 Ip Mc + 2 Ip Mp + 2 L^2 Mc Mp)}$$

$$\{fi''[t] == 6.87285 Fa[t] - 17.1821 Fd[t] - 47.1959 fi[t] - 0.120275 fi'[t] - 10.3093 x'[t],$$

$$x''[t] == 1.82131 Fa[t] + 0.446735 Fd[t] - 2.69691 fi[t] + 0.00687285 fi'[t] - 2.73196 x'[t]\}$$

```
z1 = Collect[EqDL2TS, -2 Ip * Mc - 2 Ip * Mp - 2 L * L * Mc * Mp]
```

$$\{fi''[t] == -\frac{2 L Mp Fa[t]}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} + \frac{2 L Mc Fd[t]}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} +$$

$$\left\{ \frac{2 g L Mc Mp}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} + \frac{2 g L Mp^2}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} \right\} fi[t] +$$

$$\left\{ \frac{2 c Mc}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} + \frac{2 c Mp}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp} \right\} fi'[t] +$$

$$\frac{2 b L Mp x'[t]}{-2 Ip Mc - 2 Ip Mp - 2 L^2 Mc Mp}$$

$$x''[t] == -\frac{2 g L^2 Mp^2 fi[t]}{2 Ip Mc + 2 Ip Mp + 2 L^2 Mc Mp} + \frac{2 c L Mp fi'[t]}{2 Ip Mc + 2 Ip Mp + 2 L^2 Mc Mp} +$$

$$\frac{(2 Ip Fa[t] + 2 L Mp Fa[t] + 2 Ip Fd[t] - 2 b Ip x'[t] - 2 b L Mp x'[t]) /}{(2 Ip Mc + 2 Ip Mp + 2 L^2 Mc Mp)}$$

pendulum 4 - w dol.nb

4

z2 = Simplify[z1]

$$\{fi''[t] == -(-L Mp Fa[t] + L Mc Fd[t] + g L Mc Mp fi[t] + g L Mp^2 fi[t] + c Mc fi'[t] + c Mp fi'[t] + b L Mp x'[t]) / (L^2 Mc Mp + Ip (Mc + Mp)), x''[t] == ((Ip + L^2 Mp) Fa[t] + Ip Fd[t] - g L^2 Mp^2 fi[t] + c L Mp fi'[t] - b Ip x'[t] - b L^2 Mp x'[t]) / (L^2 Mc Mp + Ip (Mc + Mp))\}$$

FullSimplify[z2]

$$\{fi''[t] == -(-L Mp Fa[t] + L Mc Fd[t] + (Mc + Mp) (g L Mp fi[t] + c fi'[t]) + b L Mp x'[t]) / (L^2 Mc Mp + Ip (Mc + Mp)), x''[t] == ((Ip + L^2 Mp) Fa[t] + Ip Fd[t] + L Mp (-g L Mp fi[t] + c fi'[t]) - b (Ip + L^2 Mp) x'[t]) / (L^2 Mc Mp + Ip (Mc + Mp))\}$$

z3 = Simplify[N[z2 /. subs]]

$$\{fi''[t] == 4.16667 Fa[t] - 10.4167 Fd[t] - 28.6125 fi[t] - 0.0729167 fi'[t] - 6.25 x'[t], x''[t] == 1.66667 Fa[t] + 0.833333 Fd[t] - 1.635 fi[t] + 0.00416667 fi'[t] - 2.5 x'[t]\}$$